

Deima verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA - CL II STPCA -
2.2. 2007/08 - Roveto, 26 - 30 novembre 2007

1) $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-x} = \frac{2x^2-1}{x(x-1)}$

5
pag. 5
Vedi (*)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty & x=0 \text{ asintoto verticale per } f; \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty & (\quad \quad \quad); \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty & x=1 \text{ asintoto verticale per } f; \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty & (\quad \quad \quad); \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 & y=2 \text{ asintoto orizzontale per } f, \text{ per } x \rightarrow -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 & \text{ " " , per } x \rightarrow +\infty. \quad \square \end{cases}$$

• $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} -e^x + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 4x - \frac{4}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x + 1) = 1$ $y=1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $x=0$ è asintoto verticale per f ;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - \frac{4}{x}) = +\infty$: segue facilmente che $y=4x$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$ $\square$

5
pag. 5
Vedi (*)

• $h: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x) = \frac{-x^3+1}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty$ $x=0$ asintoto verticale per f ;
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ (" ");

Notiamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ (quindi non abbiamo asintoti orizzontali!). Inoltre osserviamo che, per $x \rightarrow -\infty$, (e analog.

per $x \rightarrow +\infty$) si ha che $h(x)$ si comporta come $-x$ (infatti

$h(x) = \frac{-x^3+1}{x^2} = -\frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = -x + \frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$).

Allora $h(x)$ ha asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ (per $x \rightarrow -\infty$):
(e sarà $y = -x$; lo dimostreremo con le formule viste a lezione)

prova intuitiva e diretta!

allora $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ (x \rightarrow +\infty)}} \frac{h(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ (+\infty)}} \frac{-x^3+1}{x^3} = -1$ inoltre

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ (+\infty)}} [h(x) - (-x)] = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ (+\infty)}} \left[\frac{-x^3+1}{x^2} + x \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ (+\infty)}} \left[\frac{-x^3+1+x^3}{x^2} \right] = 0$$

Quindi $y = -x$ è asintoto obliquo per $f(x)$, per $x \rightarrow +\infty$ (per $x \rightarrow -\infty$).

2) i) a) $f(x) = 2x^3 - 1$ $f'(x) = 6x^2$

eq. della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel pt. $(1, 1)$:

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 1 + 6(x-1)$$

$$\Rightarrow y = 6x - 5$$

□

b) $g(x) = -3\sqrt[4]{x} = -3x^{1/4}$ $g'(x) = -3 \cdot \frac{1}{4} x^{1/4-1} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^{3/4}}$

eq. della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel pt. $(1, -3)$:

$$y = g(1) + g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = -3 - \frac{3}{4}(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$

□

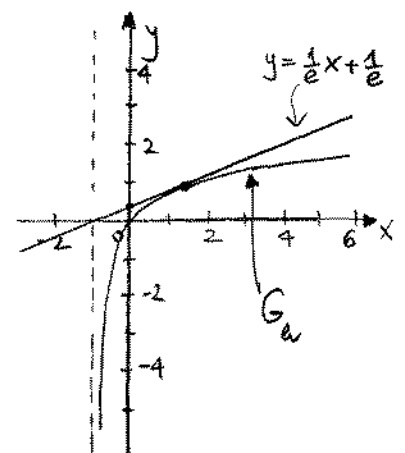
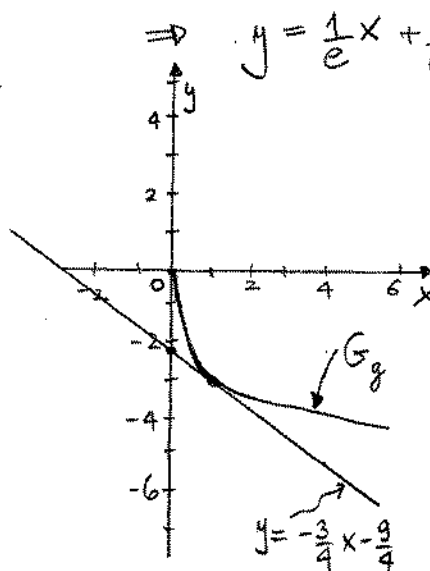
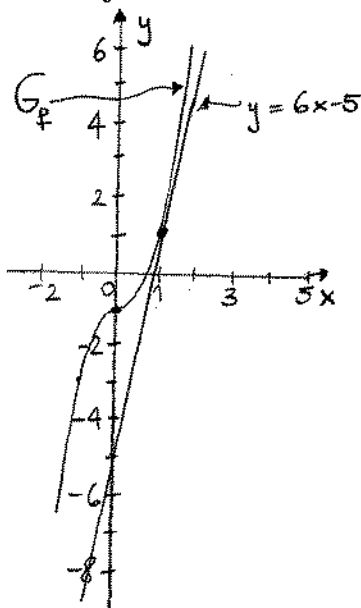
c) $h(x) = \log(x+1)$ $h'(x) = \frac{1}{x+1}$

eq. della retta tangente al grafico di $h(x)$ nel pt. $(e-1, 1)$:

$$y = h(e-1) + h'(e-1)(x - (e-1)) \Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{e}(x - e + 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$$

□



□

ii) a) $f(x) = (3x+1)^{-3}$ $f'(x) = -3(3x+1)^{-4} \cdot 3 = -9(3x+1)^{-4}$

eq. della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel pt. $(0, 1)$:

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 - 9(x-0)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y = -9x + 1}$$

□

b) $g(x) = \log(2x+1)$ $g'(x) = \frac{2}{2x+1}$

eq. della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel pt. $(0, 0)$:

$$y = g(0) + g'(0)(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 + 2(x-0)$$

$$\underline{y = 2x}$$

□

c) $h(x) = e^{x^2-2x}$ $h'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x}$

eq. della retta tangente al grafico di $h(x)$ nel pt. $(1, \frac{1}{e})$:

$$y = h(1) + h'(1)(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{e} + 0 \cdot (x-1)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y = \frac{1}{e}}$$

■

3) i) a) $(4x^2 + x^{-2})' = \underline{8x - 2x^{-3}}$;

$$\left(\frac{1}{4x^2} - 2x^3\right)' = \left(\frac{x^{-2}}{4} - 2x^3\right)' = \underline{-\frac{x^{-3}}{2} - 6x^2}$$
 ;

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)' = \frac{2x(x-3) - x^2 \cdot 1}{(x-3)^2} = \underline{\frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}}$$
 ;

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \left(\frac{x^{1/2}}{x+1}\right)' = \underline{\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}(x+1) - x^{1/2} \cdot 1}{(x+1)^2}}$$

□

b) $\left[(x+3x^{-1})(\log x + \sqrt[3]{x})\right]' = (x+3x^{-1})'(\log x + \sqrt[3]{x}) + (x+3x^{-1})(\log x + \sqrt[3]{x})'$
 $= (1-3x^{-2})(\log x + \sqrt[3]{x}) + (x+3x^{-1})\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^{-2/3}\right)$;

$$\left[(x^{-4}+x)(e^x+2x)\right]' = (x^{-4}+x)'(e^x+2x) + (x^{-4}+x)(e^x+2x)'$$

 $= (-4x^{-5}+1)(e^x+2x) + (x^{-4}+x)(e^x+2)$;

$$\left[(e^x+2x)\log_2 x\right]' = (e^x+2x)' \log_2 x + (e^x+2x)(\log_2 x)'$$

 $= (e^x+2) \log_2 x + (e^x+2x) \cdot \frac{1}{x \log 2}$;

c) $\left(\frac{x \log x + e^x}{x^2}\right)' = \underline{\underline{\frac{(\log x + 1 + e^x)x^2 - (x \log x + e^x) \cdot 2x}{x^4}}}$;

$$(x^3 + 3^x)' = 3x^2 + 3^x \log 3 ;$$

$$(3e^2 + x^{-1} 2^x)' = -x^{-2} 2^x + x^{-1} 2^x \log 2 .$$

□

$$ii) [(2x-4)^5]' = 5(2x-4)^4 \cdot 2 = 10(2x-4)^4 ;$$

$$(e^{x^2})' = 2xe^{x^2} ;$$

$$[(x^2 - x^{-1})^4]' = 4(x^2 - x^{-1})^3 (2x + x^{-2}) ;$$

$$[x^2 \log(1-5x)]' = 2x \log(1-5x) + x^2 \cdot \frac{(-5)}{1-5x} .$$

■

$$4)i) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty .$$

□

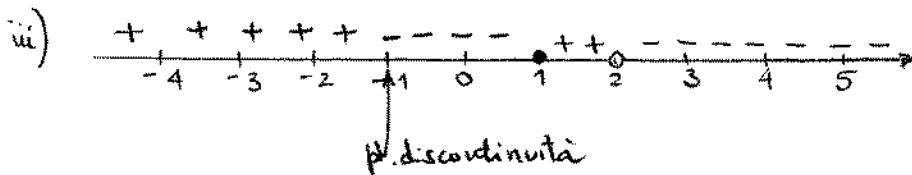
$$ii) f \text{ \u00e9 continua in }]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[;$$

Notiamo che $x = -1$ \u00e9 un pt. di discontinuit\u00e0 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 = f(-1) ;$$

Notiamo che in $x = 2$ la funzione non \u00e9 definita.

□



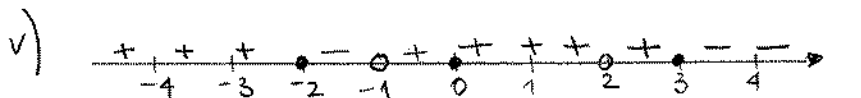
□

$$iv) y = 1 \text{ \u00e9 asintoto orizzontale per } f \text{ per } x \rightarrow -\infty ;$$

$$x = 2 \text{ \u00e9 asintoto verticale per } f ;$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 4 \text{ \u00e9 asintoto obliquo per } f \text{ per } x \rightarrow +\infty .$$

□



□

$$vi) \min_{[-4,0]} f = f(-1) = -2 \quad x = -1 \text{ pt. di minimo ,}$$

$$\max_{[-4,0]} f = f(-2) = 2 \quad x = -2 \text{ pt. di massimo .}$$

■

Vedi (*) pag. 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)} = -\infty$$

$\nearrow -1$
 $\nwarrow$ infinitesimo neg $\searrow -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)} = +\infty$$

$\nearrow -1$
 $\nwarrow$ infinitesimo positivo $\searrow -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)} = -\infty$$

$\nearrow 1$
 $\nwarrow$ 1 $\searrow$ infinitesimo neg.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)} = +\infty$$

$\nearrow 1$
 $\nwarrow$ 1 $\searrow$ infinitesimo positivo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x})} = 2$$

$\nearrow 0$
 $\nwarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x})} = 2$$

$\nearrow 0$
 $\nwarrow 0$

Vedi (**) pag. 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

$\nearrow 1$
 $\nwarrow$ infinitesimo positivo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

$\nearrow 1$
 $\nwarrow$ infinitesimo positivo