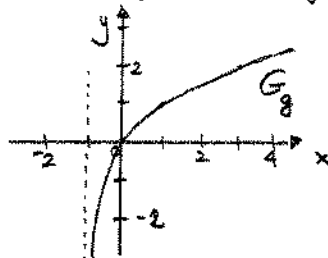
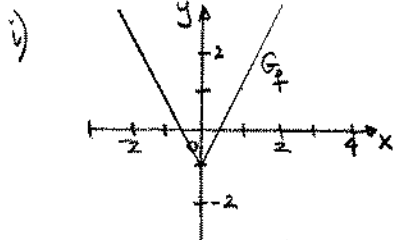


FILA (A)

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2|x| - 1$

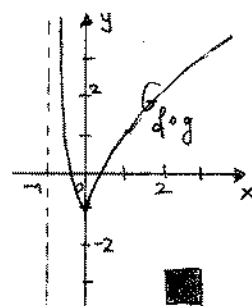
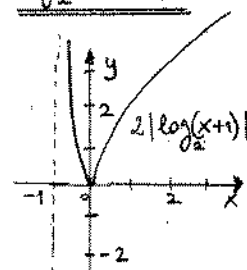
$g:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \log_2(x+1)$



ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log_2(2|x| - 1 + 1) = \log_2(2|x|)$

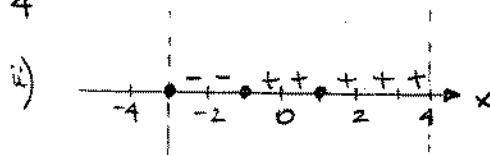
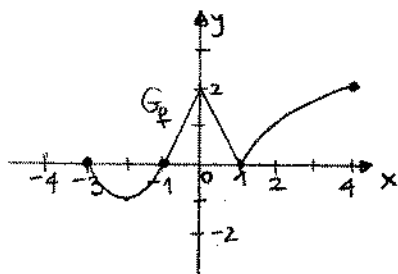
$\begin{cases} x \in \mathbb{R} : 2|x| - 1 > -1 \\ x \in \mathbb{R} : |x| > 0 \end{cases} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2|\log_2(x+1)| - 1$



2) i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ -2|x| + 2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \log_2 x & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Oss. $x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$



iii) in $[-3, -2]$ f è decrescente;

$[-2, 0]$ f è crescente;

$[0, 1]$ f è decrescente;

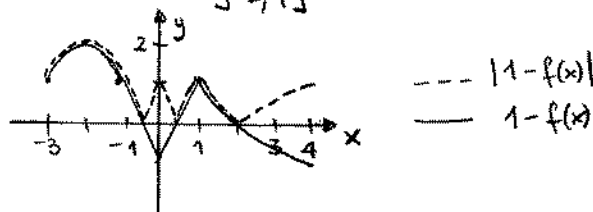
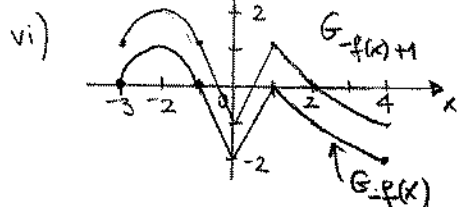
$[1, 4]$ f è crescente.

iv) $[-3, 4]$ è un intervallo chiuso e limitato; inoltre f è continua

(nota: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0$; in tutti gli altri punti, f è continua essendo somma di funz. continue); f soddisfa le ipotesi del teor. di Weierstrass.

v) $\min_{[-1, 4]} f = 0$ $x = 1$ pt. di min.

$\max_{[-1, 4]} f = 2$ $x = 0, x = 4$ pt. di max.



$$3) i) 2|x-3|=4 \Leftrightarrow |x-3|=2 \Leftrightarrow x-3=\pm 2 \Rightarrow S=\{1, 5\}.$$

$$|x^2-2x|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x^2-2x\leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x^2-2x+2 \\ x^2-2x-2\leq 0 \end{cases} \rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$$

$$S=[1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}].$$

$$|3x-4|>1 \Leftrightarrow 3x-4<-1 \vee 3x-4>1 \Rightarrow S=\left]-\infty, 1\right[\cup \left]\frac{5}{3}, +\infty\right[.$$

$$ii) 4|x-3|+x\geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\geq 0 \\ 4(x-3)+x\geq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-3<0 \\ -4(x-3)+x\geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ 5x\geq 14 \end{cases} \vee \begin{cases} x<3 \\ 3x\leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow S=\mathbb{R}.$$

$$2^{x^2+2}\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \Leftrightarrow 2^{x^2+2}\leq 2^{-3x} \Leftrightarrow x^2+2\leq -3x \Leftrightarrow x^2+3x+2\leq 0$$

$$S=[-2, -1].$$

$$\log(1-x)\leq 1 \Leftrightarrow 0<1-x\leq e \Rightarrow S=[1-e, 1[.$$

$$iii) \log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}|x|\geq \log_{\frac{1}{2}}2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ |x|\neq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}[(x-1)|x] \geq \log_{\frac{1}{2}}2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-1)x\leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x-2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ -1\leq x\leq 2 \end{cases} \Rightarrow S=\left]1, 2\right].$$

$$\left(\frac{\log_2 4 + \log_2 \frac{1}{2}}{\log_3 1 - \log_3 64}\right)x = x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2-1}{0+3}\right)x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{3}-x\right)=0 \Rightarrow S=\left\{0, \frac{1}{3}\right\}$$

$$4) i) \log_2 x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2 x < \log_2 \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{2}$$

ii) $f(x) = \log_2(x+1) + 2x - 1$: f è continua su $[0, 1]$ (somma di funr. continue);
 inoltre $f(0) = \log_2 1 - 1 = -1 < 0$ e $f(1) = \log_2 2 + 1 = 2 > 0$. Dal teorema degli
 zeri segue che $\exists c \in]0, 1[$ t.c. $f(c) = 0$. Poiché f è crescente (somma di funr. crescenti)
 tale c è unico. Prendiamo $a_1 = \frac{1}{2}$; allora $f(\frac{1}{2}) = \log_2 \frac{3}{2} > 0$.
 consideriamo allora $a_2 = \frac{1}{4}$ e $f(\frac{1}{4}) = \log_2(\frac{5}{4}) - \frac{1}{2}$; da i) segue che
 $f(\frac{1}{4}) < 0$ (poiché $\frac{5}{4} < \sqrt{2}$). Possiamo allora prendere l'intervallo
 $\underline{]a, b[} = \underline{] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} [}$; tale intervallo contiene c .

5) i) f è limitata superiormente (infatti $f(x) \leq 2 \forall x \in [-3, 3]$); f non è
 limitata inferiormente (infatti, $\forall m < 0$ si ha che $\exists x \in [-3, 4]$

t.c. $f(x) < m$).

□

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \underline{1}$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \underline{1}$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{-\infty}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{2}$.

□

iii) $x = -2$ pt. di discontinuità : $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \neq f(-2) = 2$;

$x = 1$ pt. di discontinuità : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \neq f(1) = 0$ □

iv) se $k < 0$ $\exists$ 1 soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

se $0 \leq k < 1$ Sono 4 soluzioni ;

se $1 \leq k \leq 2$ Sono 2 soluzioni ;

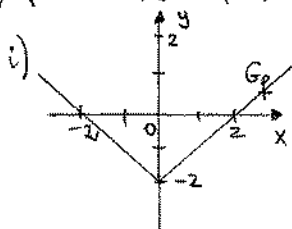
se $k > 2$ $\nexists$ soluzioni dell'eq. $f(x) = k$. ■

6) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = \underline{-\infty}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \log x} = \underline{0}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{4 + \frac{1}{x}} = \underline{\frac{1}{4}}$;

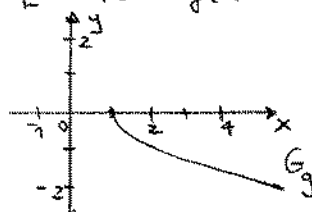
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \frac{1}{x^2} + 4) = \underline{+\infty}$. ■

FILA ⑧

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x| - 2$



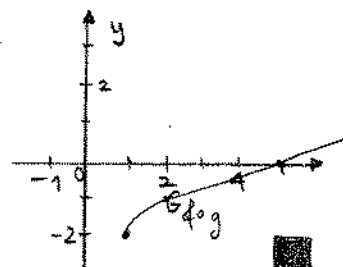
$g: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = -\sqrt{x-1}$.



□

ii) $(g \circ f)(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 1\} \\ = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 3\} =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[}}{g(f(x))} = -\sqrt{|x| - 2 - 1} = \underline{-\sqrt{|x| - 3}}$.

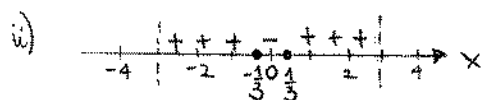
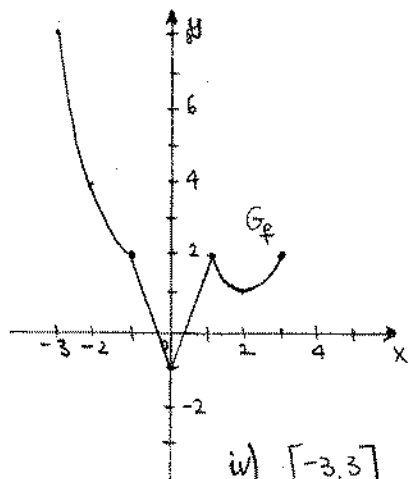
$(f \circ g)(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ x \in [1, +\infty[}}{f(g(x))} = |\sqrt{x-1}| - 2 = \underline{\sqrt{x-1} - 2}$.



■

2) $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 3|x| - 1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

OSS. $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$



ii) in $[-3, 0]$ f è decrescente;

$[0, 1]$ f è crescente;

$[1, 2]$ f è decrescente;

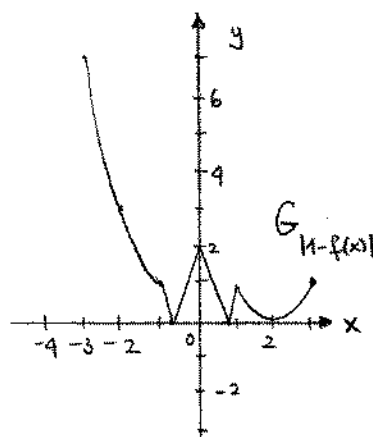
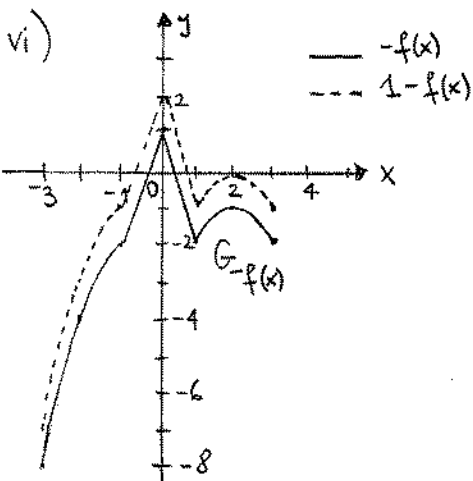
$[2, 3]$ f è crescente.

iv) $[-3, 3]$ intervallo chiuso e limitato; inoltre f è continua

(nota: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$; in tutti gli altri punti, f è continua essendo somma di fnc. continue): f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

v) $\min_{[-1, 2]} f = -1$ $x=0$ pt. di min.

$\max_{[-1, 2]} f = 2$ $x=-1, x=1$ pt. di max.



3) i) $2|x-2|=8 \Leftrightarrow |x-2|=4 \Leftrightarrow x-2=\pm 4 \Rightarrow S=\{-2, 6\}$.

$|x^2-x|>1 \Leftrightarrow x^2-x<-1 \text{ o } x^2-x>1 \Leftrightarrow x^2-x+1<0 \text{ o } x^2-x-1>0$

$S =]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$.

$|4x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 4x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 4x \leq 5 \Rightarrow S = [-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$.

ii) $4|x-1|+x < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4(x-1)+x < 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-1 < 0 \\ -4(x-1)+x < 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x < 6 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 1 \\ 2 < 3x \end{cases} \Rightarrow S =]\frac{2}{3}, \frac{6}{5}[$.

$3^{x^2-2} \geq (\frac{1}{3})^{-x} \Leftrightarrow 3^{x^2-2} \geq 3^x \Leftrightarrow x^2-2 \geq x \Leftrightarrow x^2-x-2 \geq 0$

$S =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.

$$\log(1+3x) < 1 \Leftrightarrow 0 < 1+3x < e \Leftrightarrow -1 < 3x < e-1 \Rightarrow S =]-\frac{1}{3}, \frac{e-1}{3}[.$$

$$\text{iii) } \log(x-2) - \log|x| \leq \log 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ |x| \neq 0 \\ \log \frac{x-2}{|x|} \leq \log 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \frac{x-2}{x} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x-2 \leq 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow S =]2, +\infty[.$$

$$\left(\frac{\log_2 1 + \log_{\frac{1}{2}} 8}{\log_3 9 + \log_3 \frac{1}{3}} \right) x^2 = x \Leftrightarrow \left(\frac{-3}{2-1} \right) x^2 - x = 0 \quad -3x^2 - x = 0$$

$$S = \left\{ 0, -\frac{1}{3} \right\}.$$

4) i) $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x \in]0, 1[.$ $\square$

ii) Poniamo $f(x) = \sqrt{x} + 3x - 1$; f è continua su $[0, 1]$; inoltre $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 3 > 0$. Dal teorema degli zeri segue che $\exists c \in]0, 1[$ tale che $f(c) = 0$. Poiché f è crescente (somma di funz. crescenti) tale c è unico. Prendiamo $a_1 = \frac{1}{2}$; abbiamo $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} > 0$. Consideriamo allora $a_2 = \frac{1}{4}$ e $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$; da i) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ segue che $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} > 0$. Possiamo allora prendere $]a, b[=]0, \frac{1}{4}[$; tale intervallo contiene c . $\blacksquare$

5) i) f è limitata inferiormente (infatti $f(x) \geq -2 \forall x \in [-3, 3]$); f non è limitata superiormente (infatti, $\forall M > 0$ si ha che $\exists x \in [-3, 3]: f(x) > M$). $\blacksquare$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \underline{-1}$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \underline{-2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{1}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{+\infty}$. $\square$

iii) $x = -1$ pt. di discontinuità: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 = f(-1)$;
 $x = 1$ pt. di discontinuità: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq f(1) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ $\square$

iv) se $k < -2$ $\nexists$ soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

se $-2 \leq k \leq -1$ Sono 2 soluzioni " ;

se $-1 < k \leq 0$ Sono 3 soluzioni " ;

se $0 < k < 1$ Sono 2 soluzioni " ;

se $(1 \leq k) \vee (k \neq 2)$ $\exists$ 1 soluzione " ;

se $k = 2$ Sono 2 soluzioni dell'equazione $f(x) = k$. $\blacksquare$

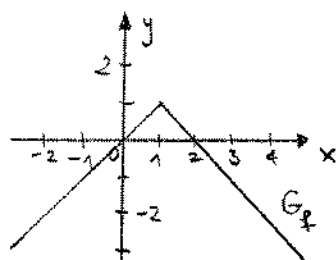
$$6) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log x + 1}{4+x^2} = \frac{1}{5} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 3}{e^x - 1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{x^2} + 4 \right) = -\infty.$$

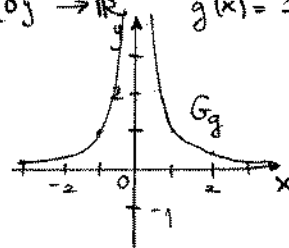
FILA C

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = -|x-1| + 1$

i)



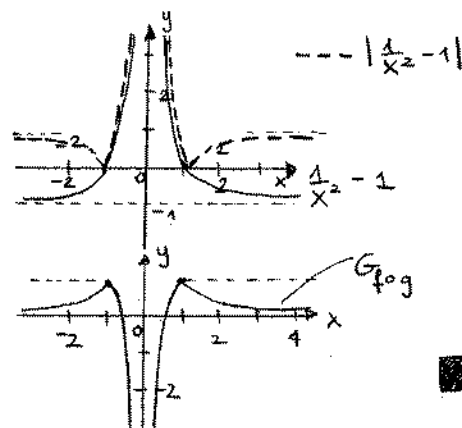
$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$



ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(-|x-1| + 1)^2}$

$= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$
 $= \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

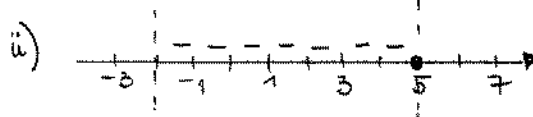
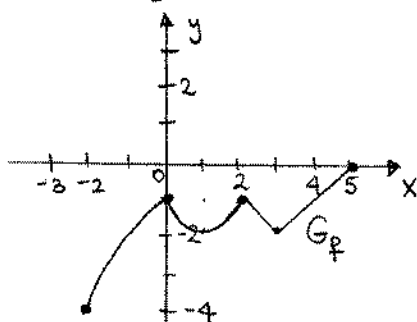
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\left|\frac{1}{x^2} - 1\right| + 1$
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



2) i)

$$f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ |x-3| - 2 & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

oss. $x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$



ii) in $[-2, 0]$ f è crescente;

$[0, 1]$ f è decrescente;

$[1, 2]$ f è crescente;

$[2, 3]$ f è decrescente;

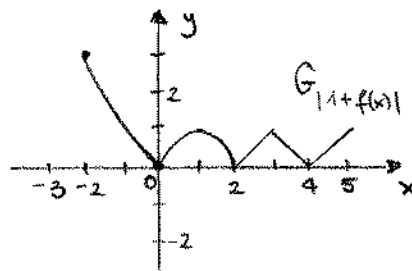
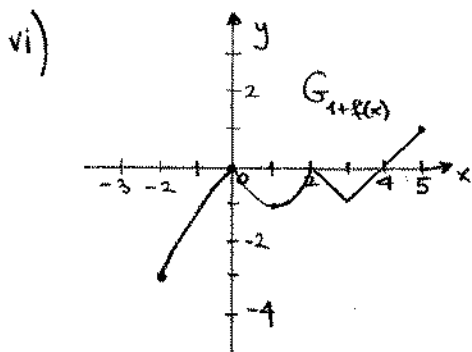
$[3, 5]$ f è crescente. □

iv) $[-2, 5]$ è un intervallo chiuso e limitato; inoltre f è continua

(nota: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 = f(0)$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 = f(2)$; in tutti gli altri punti, f è continua essendo somma di funzioni continue): f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass. $\square$

v) $\min_{[0,4]} f = \underline{-2}$ $x=1, x=3$ punti di minimo;

$\max_{[0,4]} f = \underline{-1}$ $x=0, x=2, x=4$ punti di massimo. $\square$



3) i) $3|x+2|=6 \Leftrightarrow |x+2|=2 \Leftrightarrow x+2=\pm 2 \Rightarrow \underline{S=\{-4, 0\}}$.

$|x^2-3x| \geq 4 \Leftrightarrow x^2-3x \leq -4 \text{ o } x^2-3x \geq 4$

$\Leftrightarrow x^2-3x+4 \leq 0 \text{ o } x^2-3x-4 \geq 0 \Rightarrow \underline{S=[-\infty, -1] \cup [4, +\infty]}$.

$|3x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 3x-2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 3x \leq 3 \Rightarrow \underline{S=[\frac{1}{3}, 1]}$. $\square$

ii) $2|x-2|+3x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2(x-2)+3x > 1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-2 < 0 \\ -2(x-2)+3x > 1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 5x > 5 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 2 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow \underline{S=[-3, +\infty]}$.

$e^{x^2+2x} > \left(\frac{1}{e}\right)^{-3x+6} \Leftrightarrow e^{x^2+2x} > e^{3x-6} \Leftrightarrow x^2+2x > 3x-6$

$\Leftrightarrow x^2-x+6 > 0 \Rightarrow \underline{S=\mathbb{R}}$.

$\log(1+2x) < 1 \Leftrightarrow 0 < 1+2x < e \Leftrightarrow -1 < 2x < e-1$

$\Rightarrow \underline{S=[-\frac{1}{2}, \frac{e-1}{2}]}$. $\square$

iii) $\log_2(x-3) - \log_2|x| \leq \log_2 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x \neq 0 \\ \log_2 \frac{x-3}{|x|} \leq \log_2 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \frac{x-3}{x} \leq 4 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x-3 \leq 4x \end{cases} \text{ (nota: } x > 0!) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -3 \leq 3x \end{cases} \Rightarrow \underline{S=[3, +\infty]}$.

$$x^2 \left(\frac{\log_2 3 - \log_3 3}{\log_2 8 + \log_3 27} \right) - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{-1 - 1}{3 + 3} \right) - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(-\frac{1}{3} \right) - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+6) = 0 \Rightarrow S = \{-6, 0\}.$$

4) i) $\sqrt{x} > x \Leftrightarrow x \in]0, 1[$. □

ii) $f(x) = \sqrt{x} + 2x - \frac{3}{4}$: f è continua su $[0, 1]$ (somma di funt. continue);
 inoltre $f(0) = -\frac{3}{4} < 0$ e $f(1) = 3 - \frac{3}{4} > 0$. Dal teorema degli zeri segue che $\exists c \in]0, 1[$
 tale che $f(c) = 0$. Poiché f è crescente (somma di funt. crescenti) tale
 c è unico. Prendiamo $a_1 = \frac{1}{2}$; abbiamo $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}} + 1 - \frac{3}{4} > 0$.
 Consideriamo allora $a_2 = \frac{1}{4}$ e $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > 0$.
 Possiamo allora prendere l'intervallo $]a, b[=]0, \frac{1}{4}[$; tale intervallo
 contiene c . □

5) i) Oss. che $f([-3, 3]) = [-3, 1]$: f è limitata! □

ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \underline{\underline{1}}$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \underline{\underline{-2}}$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{\underline{1}}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{\underline{-2}}$. □

iii) $x = -1$ pt. di discontinuità : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2 = f(-1)$.

$x = 1$ pt. di discontinuità : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$. □

iv) se $k < -3$ $\nexists$ soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;

se $-3 \leq k < -2$ $\exists 1$ " " ;

se $k = -2$ $\exists$ 2 " " ;

$-2 < k \leq 0$ $\exists$ 3 " " ;

$0 < k < 1$ $\exists$ 2 " " ;

$k = 1$ $\exists 1$ " " ;

se $k > 1$ $\nexists$ soluzioni dell'eq. $f(x) = k$. □

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = \underline{\underline{+\infty}}$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log x + 2}{3 + x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 3}{e^x - 1} = \underline{\underline{0}}$

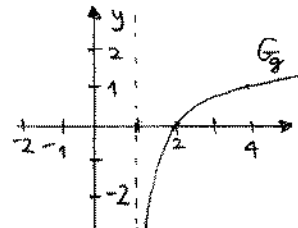
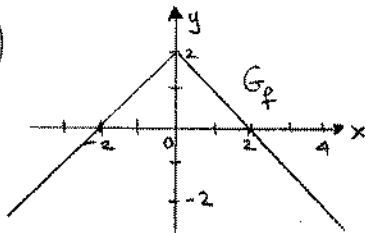
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} + 7 \right) = \underline{\underline{-\infty}}$. □

FILA (D)

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2 - |x|$

$g:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \log_3(x-1).$

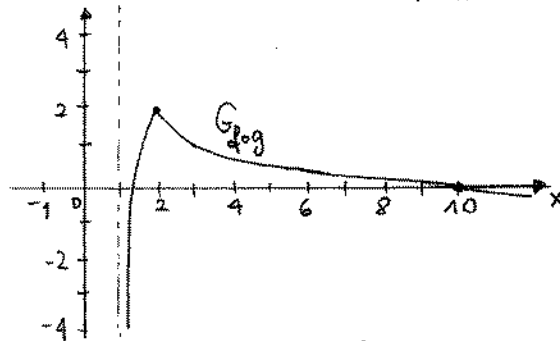
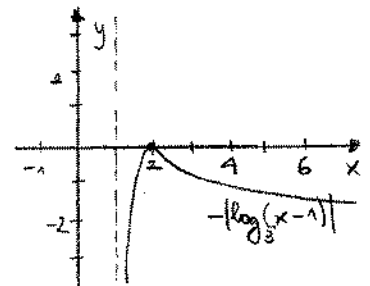
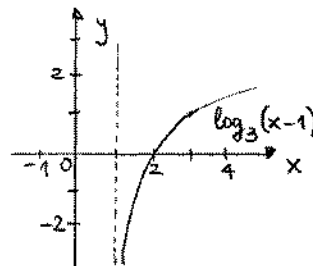
i)



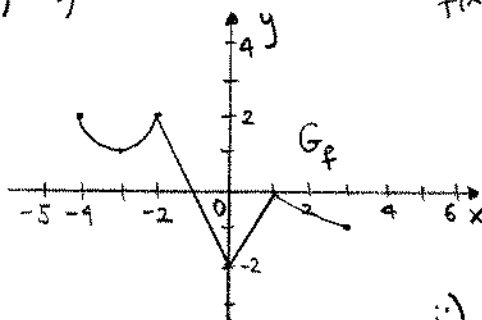
ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log_3(2 - |x| - 1) = \log_3(1 - |x|).$

$\begin{cases} x \in \mathbb{R}: 2 - |x| > 1 \\ x \in \mathbb{R}: |x| < 1 \end{cases} = \underline{\underline{]-1, 1[}}$

$(f \circ g)(x) = 2 - |\log_3(x-1)|.$
 $x \in]1, +\infty[$

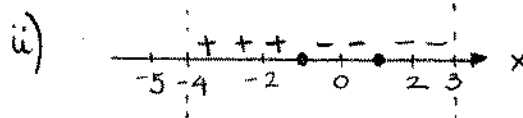


2) i)



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 10 & x \leq -2 \\ 2|x| - 2 & -2 \leq x \leq 1 \\ -\log_3 x & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

OSS. $x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1$



iii) in $[-4, -3]$ f é decrescente;

$[-3, -2]$ f é crescente;

$[-2, 0]$ f é decrescente;

$[0, 1]$ f é crescente;

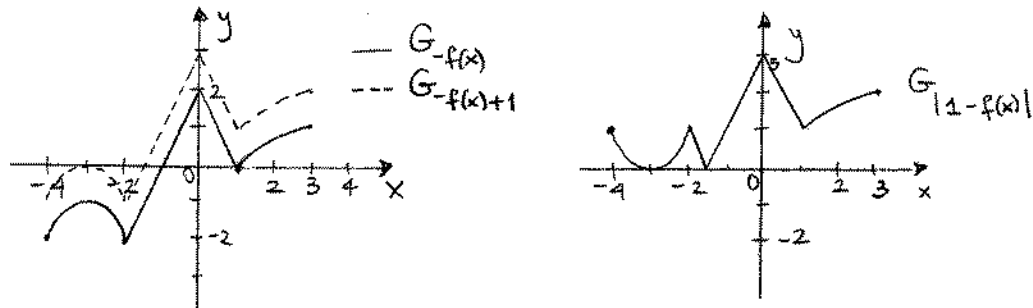
$[1, 3]$ f é decrescente.



iv) $[-4, 3]$ è un intervallo chiuso e limitato; inoltre f è continua
 (nota: $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2 = f(-2)$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = f(1)$; in tutti
 gli altri punti, f è continua essendo somma di funzioni continue);
 f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass. $\square$

v) $\min_{[-4, 0]} f = -2$ $x=0$ pt. di min. $\max_{[-4, 0]} f = 2$ $x=-2$ pt. di max. $\square$

vi)



$$3) i) 4|x-1|=2 \Leftrightarrow |x-1|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow S=\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

$$|x^2-4x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2-4x \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2-4x+1 \\ x^2-4x-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, +\infty[\\ x \in [2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = [2-\sqrt{5}, 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{5}].$$

$$|3x+4| > 1 \Leftrightarrow 3x+4 < -1 \text{ o } 3x+4 > 1$$

$$\Leftrightarrow 3x < -5 \text{ o } 3x > -3 \Rightarrow S =]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-1, +\infty[.$$

$\square$

$$ii) 3|x+1|-2x \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3(x+1)-2x \leq 1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1 < 0 \\ -3(x+1)-2x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < -1 \\ -5x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow S = \emptyset.$$

$$2^{x^2-2x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-1} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} \leq 2^{-4x+1} \Leftrightarrow x^2-2x \leq -4x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-1 \leq 0 \Rightarrow S = [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}].$$

$$\log(1-3x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 1-3x \leq e \Leftrightarrow 1 > 3x \geq 1-e \Rightarrow S = \left[\frac{1-e}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

$\square$

$$\text{iii) } \log_{1/3} (x-2) + \log_{1/3} |x| \geq \log_{1/3} 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ |x| \neq 0 \\ \log_{1/3} (x-2)|x| \geq \log_{1/3} 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ (x-2)x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]2, 3]}.$$

$$x^2 - \left(\frac{\log_2 8 - \log_{1/3} 27}{\log_2 2 + \log_4 4} \right) x = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{3 + 3}{1+0} \right) x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow \underline{S = \{0, 6\}}.$$

4) i) $\log_2 x < 1 \Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 2 \Rightarrow \underline{x \in]0, 2[}$. $\square$

ii) $f(x) = \log_2(x+1) + 4x - 2$: f è continua su $[0, 1]$ (somma di funz. continue); abbiamo $f(0) = -2 < 0$ e $f(1) = \log_2 2 + 4 - 2 = 3 > 0$. Dal teorema degli zeri segue che $\exists c \in]0, 1[$ tale che $f(c) = 0$. Essendo f crescente (somma di funz. crescenti), tale c è unico. Prendiamo $a_1 = \frac{1}{2}$; abbiamo $f(\frac{1}{2}) = \log_2(\frac{3}{2}) > 0$. Consideriamo allora $a_2 = \frac{1}{4}$ e $f(\frac{1}{4}) = \log_2(\frac{5}{4}) - 1$; da i) segue che $f(\frac{1}{4}) < 0$. Possiamo allora prendere l'intervallo $]a, b[=]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$; tale intervallo contiene c . $\blacksquare$

5) i) f è limitata superiormente ($f(x) < 2 \forall x \in [-3, 4]$), mentre f non è limitata inferiormente (infatti, $\forall m < 0$ mi ha che $\exists x \in]0, 1[$ t.c. $f(x) < m$). $\square$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \underline{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{0}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{-\infty}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \underline{-1}$. $\square$

iii) $x = -1$ p. di discontinuità : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 \neq f(-1) = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$;
 $x = 1$ p. di discontinuità : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$! $\square$

iv) se $k < -1$ $\exists$ una soluz. dell'eq. $f(x) = k$;
 se $-1 \leq k < 0$ $\exists$ ono 2 soluzioni "
 $0 \leq k \leq 1$ $\exists$ ono 3 soluzioni "
 $1 < k < 2$ $\exists$ una soluzione "
 $k \geq 2$ $\nexists$ soluzioni dell'eq. " ;

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-e^x} = \underline{-\infty}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\log x} = \underline{0}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 1}{2 + \frac{1}{x^3}} = \underline{-\frac{1}{2}}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-|x| + \frac{1}{x^2} + 6) = \underline{-\infty}$. $\blacksquare$