

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive - CdL in STPCA
Esame Scritto di ANALISI MATEMATICA - Rovereto, 27 giugno 2008

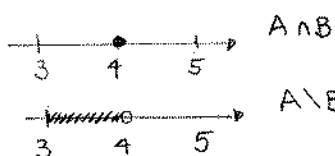
FILA (A)

1) i) a) non $(\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} : 3y = x) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{R}, 3y \neq x;$

b) non $(\forall x, y \in \mathbb{R}, (x+y)^2 \geq 0) \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : (x+y)^2 < 0;$

c) "C'è almeno un biglietto del concerto di Bob Dylan a Trento che non è ancora venduto e nemmeno prenotato".

ii)



$$A = [3, 4]$$

B non si può determinare; sicuramente

$4 \in B$, ma solo questo sappiamo di certo di B.

(potrebbe essere, per esempio, $B = \{4\}$, oppure

$B = [4, +\infty[$, $B = [4, 5]$, $B =]-\infty, 3[\cup \{4\}$,
ecc.)

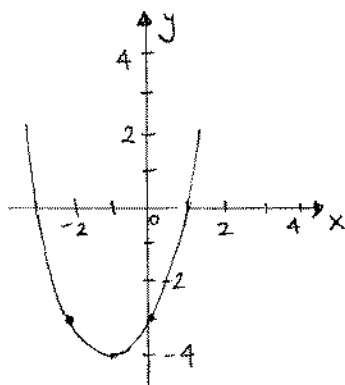
2) $f(x) = ax^2 + bx + c$

i) $f(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \end{cases}$

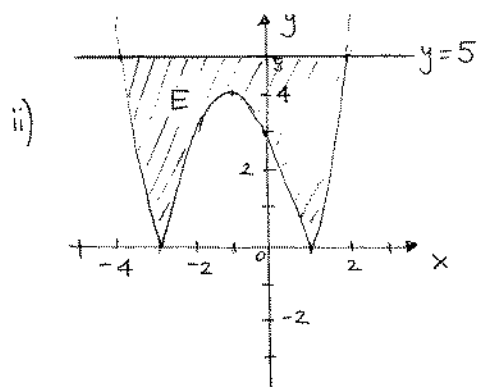
$f'(0) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \end{cases}$

$f''(1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{a=1}; \underline{b=2}; \underline{c=-3}.$

quindi $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4.$



□



-2-

$$f(x)=5 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 4 = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -4 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

Per simmetria, $\text{area}(E) = 2 \int_{-4}^{-1} (5 - |f(x)|) dx$ oppure $2 \int_{-1}^2 (5 - |f(x)|) dx$

$$\text{Ora } \text{area}(E) = 2 \int_{-4}^{-1} (5 - |f(x)|) dx = 2 \int_{-4}^{-1} (5 - f(x)) dx + 2 \int_{-1}^2 (5 + f(x)) dx$$

$$= 2 \int_{-4}^{-1} (5 - x^2 - 2x + 3) dx + 2 \int_{-1}^2 (5 + x^2 + 2x - 3) dx$$

$$= 2 \int_{-4}^{-1} (8 - x^2 - 2x) dx + 2 \int_{-1}^2 (2 + x^2 + 2x) dx$$

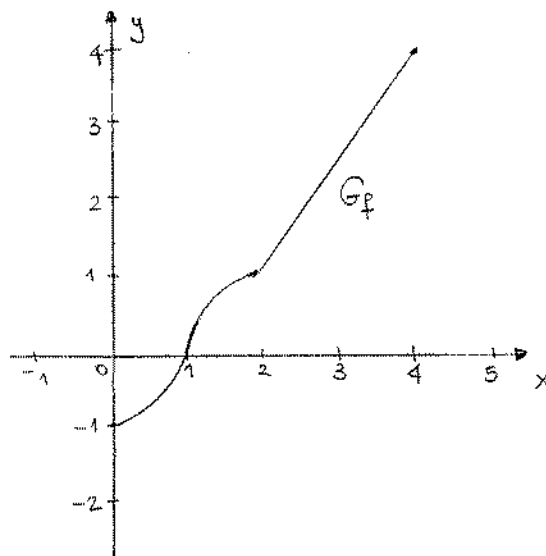
$$= 2 \left[8x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-4}^{-1} + 2 \left[2x + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^2$$

$$= 2 \left[(-24 + 8 - 1) - (-32 + \frac{64}{3} - 16) \right] +$$

$$+ 2 \left[(4 - \frac{8}{3} + 4) - (-2 + \frac{1}{3} - 1) \right]$$

$$= 2 \left[24 - \frac{64}{3} + 5 - \frac{1}{3} \right] = 2 \left[29 - \frac{65}{3} \right] = 2 \cdot \frac{22}{3} = \underline{\underline{\frac{44}{3}}}$$

3) i) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x \in [0, 2] \\ \frac{3}{2}x - 2 & x \in]2, 4] \end{cases}$



ii) f è continua su $[0, 4]$: infatti,

f è continua su $[0, 2]$ e su $]2, 4]$

(composizione di funzioni continue, e

somme di funzioni continue); inoltre $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3}{2}x - 2 \right) = 1 = f(2)$.

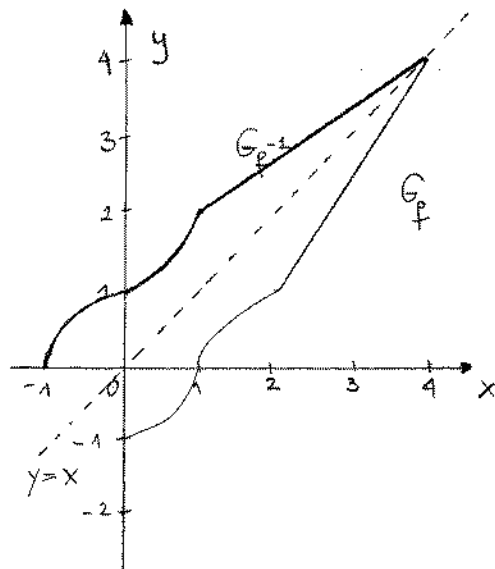
Quindi f è continua anche in $x=2$. Abbiamo dunque f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,4]$; quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass. Abbiamo immediatamente $\min_{[0,4]} f = f(0) = \underline{-1}$, $\max_{[0,4]} f = f(4) = \underline{4}$. $\square$

iii) f è una funzione iniettiva: f è definita a tratti, con $f|_{[0,2]}$ strettamente crescente e $f|_{[2,4]}$ strettamente crescente; inoltre

$$f(2) \leq f(x) \quad \forall x \in]2,4].$$

Infine $f([0,4]) = [-1,4]$; quindi f risulta anche suriettiva.

Possiamo allora asserire che f è biiettiva e dunque ammette inversa f^{-1} .



$$f^{-1}: [-1,4] \rightarrow [0,4]$$

$\square$

4) $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$, e in particolare in $[0,1]$.

Abbiamo $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $f(1) = \frac{3}{2} > 0$. Quindi per il teorema dell'esistenza degli zeri $\exists$ almeno una soluzione di $f(x) = 0$ nell'intervallo $[0,1]$ (essendo f strett. crescente in $[0,1]$, tale soluzione sarà anche unica). Osserviamo che $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{16} < 0$; inoltre

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{81}{256} + \frac{27}{64} - \frac{1}{2} = \frac{189}{256} - \frac{1}{2} = \frac{61}{256} > 0. \text{ Possiamo allora prendere}$$

$$]a,b[=]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\subset]0,1[\text{ e abbiamo che } \exists x_0 \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[: f(x_0) = 0$$

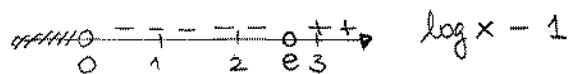
$\square$

5) $f(x) = \frac{1}{\log x - 1}$

• $\text{dom } f =]0, +\infty[\setminus \{e\}$

f è continua in tutti i pti. del suo dominio.

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

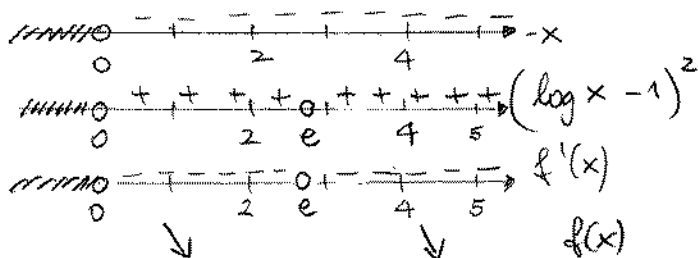
$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

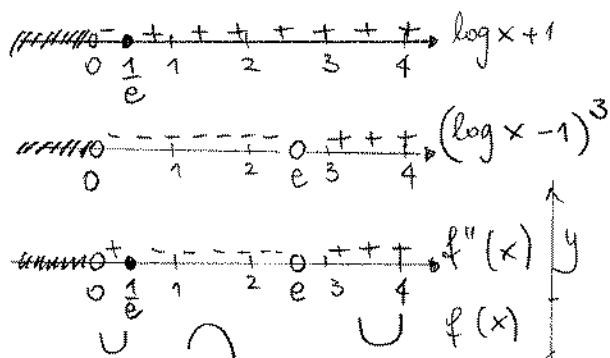
• $\text{dom } f' = \text{dom } f$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = -\frac{1}{x(\log x - 1)^2}$$



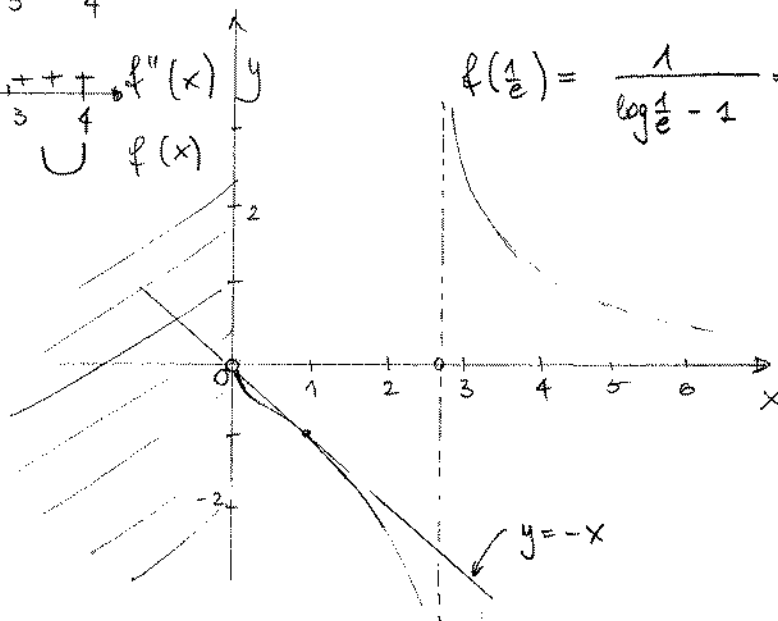
• $\text{dom } f'' = \text{dom } f$

$$f''(x) = \frac{(\log x - 1)^2 + x \cdot 2(\log x - 1) \cdot \frac{1}{x}}{x^2(\log x - 1)^4} = \frac{(\log x - 1)(\log x - 1 + 2)}{x^2(\log x - 1)^4} = \frac{\log x + 1}{x^2(\log x - 1)^3}$$



$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\log \frac{1}{e} - 1} = -\frac{1}{2}$

grafico qualitativo di f



ii) $f(1) = -1$ $f'(1) = -1$

$$y = -1 - 1(x-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -x}}$$



iii) se $k < 0$ oppure $k > 0$ $\exists!$ soluzione dell'eq. $f(x) = k$.

se $k = 0$ $\nexists$ soluzione dell'eq. $f(x) = k$.



6) $C_{8,2}$.

