

FILA (B)

$$1) |x-2| - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2-x^2 \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x-2 < 0 \\ -(x-2)-x^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 2 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \circ \begin{cases} x < 2 \\ x \leq -2 \circ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[.} \quad \square$$

$$|\sqrt[3]{x}-1| > 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}-1 < -1 \circ \sqrt[3]{x}-1 > 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} < 0 \circ \sqrt[3]{x} > 2 \Rightarrow \underline{S =]-\infty, 0[\cup]8, +\infty[.} \quad \square$$

$$ii) \log_2(x^2-3) \leq \log_2|x| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 > 0 \\ |x| > 0 \\ x^2-3 \leq |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \circ x > \sqrt{3} \\ x \neq 0 \\ x^2-3 \leq |x| \end{cases}$$

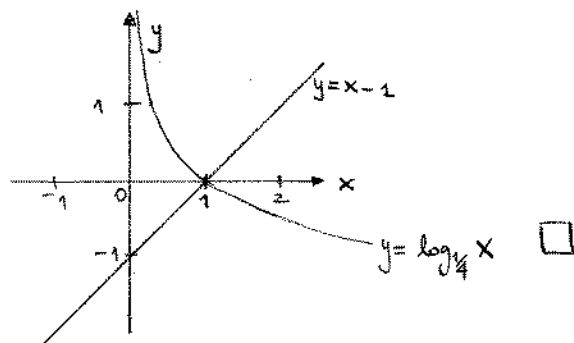
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x^2-3 \leq -x \end{cases} \circ \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x^2-3 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x^2+x-3 \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x^2-x-3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{3} \\ x \in \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \right] \end{cases} \circ \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S = \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, -\sqrt{3} \right] \cup \left[\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right].} \quad \square$$

$\log_{\frac{1}{4}} x = x - 1$: risoluzione grafica

$\Rightarrow \underline{S = \{1\}}$.



ii) $4^{x-x^2} = 2^{-2x} \Leftrightarrow 2^{2(x-x^2)} = 2^{-2x}$

$\Leftrightarrow 2x - 2x^2 = -2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \underline{S = \{0, 2\}}$. $\square$

$\frac{1}{\log x^2} > 0 \Leftrightarrow \log x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$. $\blacksquare$

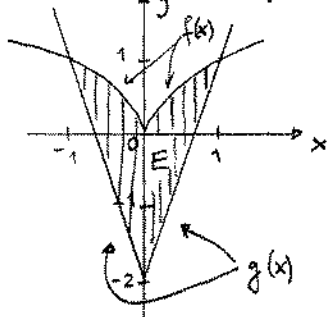
2) i) $\sum_{n=1}^9 \frac{n}{n^2+1}$. $\square$

ii) $\sum_{n=1}^6 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} dx + \dots + \int_{\frac{1}{7}}^{\frac{1}{6}} \frac{1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{7}}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{7}}^1 =$
 $= -1 + \frac{1}{\frac{1}{7}} = \underline{\underline{6}}$. $\square$

iii) $\int_0^1 (e^{-3x} + \sqrt[5]{x}) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 3e^{-3x} dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{5}} dx = -\frac{1}{3} \left[e^{-3x} \right]_0^1 + \left[\frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} \right]_0^1 =$
 $= -\frac{1}{3} (e^{-3} - 1) + \frac{5}{6} = \underline{\underline{-\frac{e^{-3}}{3} + \frac{17}{15}}}$.

$\int_{-1}^0 (2x+1)^8 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 2(2x+1)^8 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(2x+1)^9}{9} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right) \right) = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$. $\square$

iv) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = 3|x| - 2$



area E = $2 \int_0^1 (\sqrt{x} - 3x + 2) dx = 2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 =$
 $= 2 \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right] = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$. $\blacksquare$

3) i) Ricordiamo che $F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$, per $x \in [-3, 2]$. Abbiamo che $F(x)$ è
 decrescente su $[-3, -1]$, crescente su $[-1, 1]$ e decrescente su $[1, 2]$.
 Inoltre $F(-3) = 0$ e $F(-1) < F(2) < 0$ (infatti

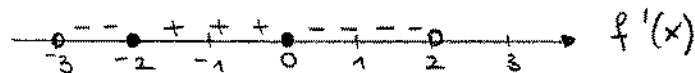
$$F(-1) = \int_{-3}^{-1} f(t) dt < \int_{-3}^{-1} f(t) dt + \underbrace{\int_{-1}^2 f(t) dt}_{>0} = F(2) ; \text{ inoltre } \int_{-3}^{-1} f(t) dt < 0,$$

$$\text{ma } \left| \int_{-3}^{-1} f(t) dt \right| > \int_{-1}^2 f(t) dt \text{ e quindi } F(2) < 0. \text{ Inoltre } F(2) < F(1) < 0.$$

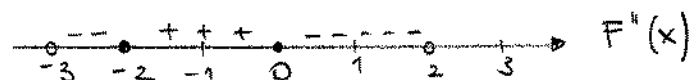
Possiamo concludere che $x = -3$ pt. di massimo di F in $[-3, 2]$ e

$x = -1$ pt. di minimo di F in $[-3, 2]$. $\square$

ii) Dal teorema fond. del calcolo integrale abbiamo che $F'(x) = f(x) \forall x \in]-3, 2[$, ed essendo f derivabile in $]-3, 2[$ possiamo calcolare anche la derivata seconda di F e si ha $F''(x) = f'(x)$ per $x \in]-3, 2[$. Dal grafico di f segue il segno di $f'(x)$:



e quindi



Allora

$\cap \cup \cap$ $F(x)$

e quindi $[a, b] = [-2, 0]$ è l'intervallo cercato. $\blacksquare$

4) i) Osserva che $f(x) = \frac{e^x}{1-x^2} = -\frac{e^x}{x^2-1}$ e quindi il grafico di

questa funzione è il simmetrico rispetto all'asse x del grafico rappresentato a pag. 3 (Es. 4) FILA (A). $\square$

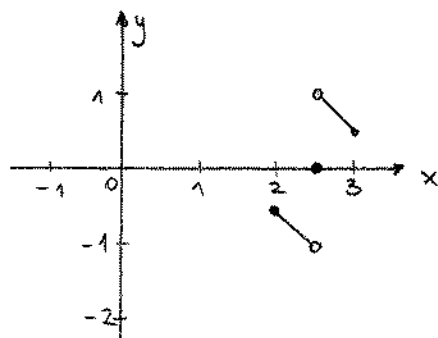
ii) $y = x + 1$ eq. della retta tg. al grafico di f in $(0, 1)$. $\square$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \int_3^4 x e^{-x} f(x) dx &= \int_3^4 x e^{-x} \frac{e^x}{1-x^2} dx = \int_3^4 \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_3^4 \frac{-2x}{1-x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\log |1-x^2| \right]_3^4 = -\frac{1}{2} (\log 15 - \log 8) = \frac{1}{2} (\log 8 - \log 15) = \\ &= \log \sqrt{\frac{8}{15}}. \end{aligned} \quad \square$$

iv) Poiché $f(x)$ è decrescente in $[3, 4]$ si ha $\max_{[3,4]} f = f(3) = \frac{e^3}{8}$ $x=3$ pt. di max;
 $\min_{[3,4]} f = f(4) = \frac{e^4}{15}$ $x=4$ pt. di min. $\blacksquare$

5) i) (F): se f non è continua, può non esistere il massimo, può non esistere il minimo, o possono non esistere entrambi.

Esempio:



ii) (V): segue dalla definizione di punto di massimo. □

iii) (V): segue dalla monotonia dell'integrale: da $f(x) \leq x^3$ su $[-2, 1]$ segue che $\int_{-2}^1 f(x) dx \leq \int_{-2}^1 x^3 dx$. Poiché $\int_{-2}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4} < 0$,
 si ha $\int_{-2}^1 f(x) dx < 0$. ■

6) $D_{18,6} = \frac{18!}{(18-6)!} = \frac{18!}{12!}$. ■