

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE
CDL DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2007-2008 — ROVERETO, 21 GENNAIO 2008

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti. Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti equazioni e/o disequazioni:

i) $\log\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}\right) < 0 ; \quad \left|\frac{2x}{x^2 + 1}\right| > 1 ;$

ii) $e^{|x+1|}e^{-x^2} < 1 ; \quad e^{-\frac{1}{|x|}} > 0 ;$

iii) $\log(x^2 - \frac{2|x|}{3}) + \log(3x) \leq \log|x| ; \quad \frac{2^{-x^2}2^{2x}}{4^x} = \frac{1}{2} .$

- 2) i) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione

$$\frac{a}{2} - \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} - \cdots + \frac{a^{15}}{16} .$$

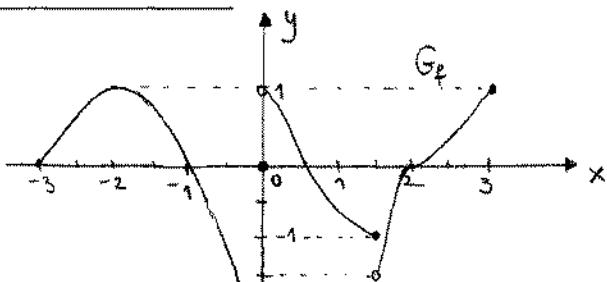
- ii) Calcolate $\sum_{n=1}^4 f^{(n)}(1)$, dove $f(x) = 3x^2 + \log x$ e $f^{(n)}(x)$ indica la derivata n -esima di f (nota: $f^{(1)}(x)$ indica la derivata prima di $f(x)$, $f^{(2)}(x)$ indica la derivata seconda di $f(x)$, ecc.).

- iii) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 e^{x+2}$.

- a) Verificate che $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{x+2} + 7$ è una primitiva di f su \mathbb{R} .

- b) Determinate $\int_{-2}^0 f(x) dx$.

- 3) Sia $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.
- Determinate gli eventuali punti di discontinuità della f (motivando la risposta).
 - Determinate gli eventuali punti critici della f .
 - Determinate il segno di $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$.
-



- 4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x}}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto di ascissa $x = 4$ e rappresentatela nello stesso sistema riferimento della f .
 - Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $x = 1$ e dalla retta tangente r .
-

- 5) Sia $f : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_2^x f(t) dt$.

Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte).

- Se $f(5) = 0$ e f è crescente su $[2, 5]$, allora F è decrescente su $[2, 5]$.
 - Se f è una funzione costante non nulla su $[2, 5]$, allora anche F lo è.
 - Se f cambia segno nell'intervallo $[2, 5]$, allora F ha almeno un punto critico nell'intervallo $[2, 5]$.
-

- 6) Potendo scegliere tra 15 Primi Piatti e 20 Secondi Piatti, in quanti modi diversi una cuoca di una mensa scolastica può stilare il menù per tutta una settimana, se i bambini mangiano a scuola a pranzo dal lunedì al venerdì? Durante la settimana un piatto non si ripete mai due volte.

COGNOME _____

NON SCRIVERE QUI

NOME _____

B

MATRICOLA | | | | | | |

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2007-2008 — ROVERETO, 21 GENNAIO 2008

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti equazioni e/o disequazioni:

i) $\left| \frac{x}{x^2+1} \right| \leq 1 ; \quad \log\left(\frac{x^2-2}{x^2+1}\right) < 0 ;$

ii) $-e^{-\frac{1}{|x|}} > 0 ; \quad e^{|2x+2|} e^{-x^2} \leq \frac{1}{e} ;$

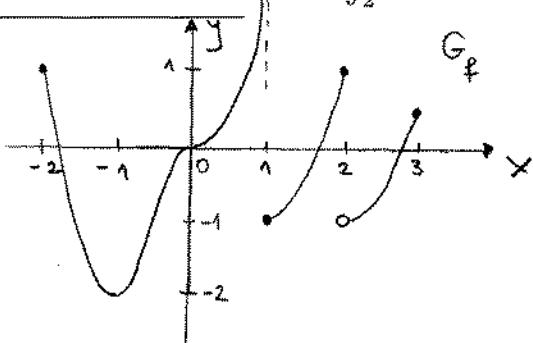
iii) $\log(x^2 - \frac{2|x|}{3}) + \log(3x) \leq \log(5|x|) ; \quad \frac{3^{2x} 9^{-x}}{3^{x^2}} = \frac{1}{81} .$

- 2) Sia $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.

i) Determinate gli eventuali punti di discontinuità della f (motivando la risposta).

ii) Determinate gli eventuali punti critici della f .

iii) Determinate il segno di $\int_2^3 f(x) dx$.



- 3) i) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione

$$\frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{4} + \cdots + \frac{a^{16}}{17}.$$

ii) Calcolate $\sum_{n=1}^4 f^{(n)}(1)$, dove $f(x) = x^3 - \log x$ e $f^{(n)}(x)$ indica la derivata n -esima di f (nota: $f^{(1)}(x)$ indica la derivata prima di $f(x)$, $f^{(2)}(x)$ indica la derivata seconda di $f(x)$, ecc.).

iii) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 e^{x+1}$.

a) Verificate che $F(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^{x+1} - 3$ è una primitiva di f su \mathbb{R} .

b) Determinate $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

- 4) Sia $f : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $F : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_2^x f(t) dt$.

Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte).

i) Se f è una funzione costante non nulla su $[2, 5]$, allora F è crescente su $[2, 5]$.

ii) Se $f(2) = 0$ e f è decrescente su $[2, 5]$, allora F è decrescente su $[2, 5]$.

iii) F ha almeno un punto critico nell'intervallo $[2, 5]$.

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{x}}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$ e rappresentatela nello stesso sistema riferimento della f .

iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalle rette di equazioni $y = 4$ ed $x = 1$.

- 6) Potendo scegliere tra 13 Primi Piatti e 18 Secondi Piatti, in quanti modi diversi una cuoca di una mensa scolastica può stilare il menù per tutta una settimana, se i bambini mangiano a scuola a pranzo dal lunedì al venerdì? Durante la settimana un piatto non si ripete mai due volte.