2021-06-21 Primo appello - AM-A

1. **2021-06-21-01**

   Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali positivi tale che

   $$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{4} \quad \forall n \geq 1$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ | Vera | Falsa |

   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \frac{4}{3}$ | Vera | Falsa |

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} = +\infty$ | Vera | Falsa |

   $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{a_n}$ è convergente. | Vera | Falsa |

2. **2021-06-21-02**

   Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$, strettamente convessa tale che $f(0) = 2$ e $f(1) = 1$.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

   $\exists x_0 \in]0,1[$ tale che $f(x_0) + x_0 - 2 = 0$ | Vero | Falso |

   $\exists x_0 \in]0,1[$ tale che $f'(x_0) = 0$ | Vero | Falso |

   $\exists x_0 \in]0,1[$ tale che $f'(x_0) = -1$ | Vero | Falso |

   $\forall x \in [0,1]$ si ha $f'(x) \neq 0$ | Vero | Falso |

3. **2021-06-21-03**

   Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{1+\sqrt{|t|}} dt.$$

   F si annulla in $x = 1$ e in $x =$ ___.

   L'equazione della retta tangente al grafico di F nel punto di ascissa $x = 0$ è $y = ax + b$ con a

negativo
nullo
positivo

   e b

negativo
nullo
positivo

   .

   F ha un punto di minimo assoluto in $x =$ ___.

   F

ha
non ha

   un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e

ha
non ha

   un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

4. **2021-06-21-04**

   Sia A l'insieme in $\mathbb{C}$ dato da

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\overline{z}^2 + i\,|z|) = 0, z\overline{z} = 2\}.$$

   Allora l'insieme A

è vuoto
è costituito da due punti
è costituito dai vertici di un quadrato
è costituito dai punti di una circonferenza di centro l'origine

5. **2021-06-21-05**

   Siano $a \in \mathbb{R}$ e $y(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$$

   tali che

$$\lim_{x\to+\infty} [y(x)e^x - ax^2] = 4.$$

   Allora si ha $a =$ ___ e $y(0) =$ ___.

6. **2021-06-21-06**

   Sia A l'insieme di definizione di

$$f(x,y) = \frac{\log(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{|y| - x^2 - 1}}.$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   A è limitato | Vera | Falsa |

   A è un insieme aperto in $\mathbb{R}^2$ | Vera | Falsa |

   $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è connesso per poligonali | Vera | Falsa |

   $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è convesso | Vera | Falsa |

   A è convesso | Vera | Falsa |

   $\overline{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ è compatto | Vera | Falsa |

7. **2021-06-21-07**

   Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y \sin x^2}{y^4 + x^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   f è continua in $(0,0)$ | Vera | Falsa |

   f è derivabile in $(0,0)$ | Vera | Falsa |

   f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni | Vera | Falsa |

8. **2021-06-21-08**

   Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(1-e^{y^2}) - \alpha \sin(x+y^3)}{\sqrt{x^4+y^4}}$$

   esiste solo se α è

uguale a
diverso da

   ___ e per tale valore di α vale ___.

9. **2021-06-21-09**

   Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - x + 3y$$

   e sia $h(t) = f(x(t), y(t))$. Si ha inoltre

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = 1 \\ x'(0) = y'(0) = 0 \\ x''(0) = -1 \\ y''(0) = 2. \end{cases}$$

   Allora $h''(0)$ è uguale a ___.

10. **2021-06-21-10**

    Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z) = \int_x^{y-z} e^{-s^2}\, ds$$

    e $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva di equazione

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t+1, -3t+1).$$

    Allora $(f \circ \mathbf{r})'(0)$ è uguale a ___.

11. **2021-06-21-11**

    Stabilite per ciascuna delle seguenti funzioni se è uniformemente continua su $]0,1]$.

    $\sqrt[3]{x}$

No
Sì

    $\log x^2$

No
Sì

    $\dfrac{\sin x}{x}$

No
Sì

12. **2021-06-21-12**

    Sia $\vartheta \in [-\pi, \pi[$ il numero per cui la direzione $\mathbf{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ è quella lungo cui è massima la crescita della funzione

    $$f(x,y) = (x^2 + y)\log(y - x)$$

    nel punto $(0,1)$.

    Allora si ha

    (a) $\vartheta = \frac{\pi}{4}$
    (b) $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$
    (c) $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$
    (d) $\vartheta = 0$

13. **2021-06-21-13**

    Sia

    $$f(x,y) = \frac{\log(y - x^2)}{2y - 3x}.$$

    L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,2,f(1,2))$ è

    $$z = ax + by + c$$

    con $a = \overline{}$, $b = \overline{}$, $c = \overline{}$.

L'equazione parametrica della retta normale al piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 2, f(1, 2))$ è

$$\begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = a + bs \\ z = c + ds \end{cases}$$

con $a =$ ___, $b =$ ___, $c =$ ___, $d =$ ___.

14. **2021-06-21-14**

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. L'esistenza di due numeri positivi c ed r tali che

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0})| \leq c \, \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| \qquad \forall \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x_0})$$

è

condizione sufficiente per la continuità di f in $\mathbf{x_0}$

Vero
Falso

condizione necessaria affinché $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0})$

Vero
Falso

condizione sufficiente affinché f risulti derivabile in $\mathbf{x_0}$

Vero
Falso

garantisce l'esistenza del massimo e del minimo di f su $B_r(\mathbf{x_0})$

Vero
Falso

15. **2021-06-21-15**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = (x - y)^2 + x^2 + y^2.$$

$(0, 0)$ è un punto di

massimo locale
minimo locale
sella

Sia T il triangolo di vertici $(-1, -1)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$. Allora si ha $\min_T f =$ ___ e $\max_T f =$ ___.