2021-07-12 Secondo appello - AM A

1. **2021-07-01**

   Sia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $f'(0) = 1$.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   $\exists r > 0 : f'(x) > 0 \ \forall x \in \,]-r, r[\, \cap [-1, 2]$ | Vero | Falso |

   $\exists r > 0 : f(x) < f(0) \ \forall x \in \,]-r, 0[\, \cap [-1, 2]$ | Vero | Falso |

   $x = 0$ non è un punto di estremo per f | Vero | Falso |

   $\exists x_0 \in \,]0, 2] : f(x_0) = \max\limits_{[0,2]} f$ | Vero | Falso |

2. **2021-07-02**

   Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

   $$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (e^{x_1}, -x_2 + x_1 e^{x_1}).$$

   Allora la funzione $\mathbf{f}$ | è | non è | un diffeomorfismo locale in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

   Inoltre si ha

   $$J_{\mathbf{f}^{-1}}(1, -1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   con $a = \_\_$, $b = \_\_$, $c = \_\_$, $d = \_\_$.

3. **2021-07-03**

   Sia $\varrho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la curva polare data dall'equazione

   $$\varrho(\vartheta) = 1 + \sin\vartheta.$$

   La curva è singolare per $\dfrac{2\vartheta}{\pi} = \_\_$.

4. **2021-07-04**

   Stabilite per ciascuna delle seguenti funzioni se è uniformemente continua su $[1, +\infty[$.

   $\dfrac{x^2 - 1}{2x}$

No
Sì

   $\dfrac{\sin x}{x}$

No
Sì

   $x^2 - x$

No
Sì

   $\cos x$

No
Sì

5. **2021-07-05**

   Sia $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

   $$\mathbf{r}(t) = (t + \sin t + 2\cos t, t^4 - t + 1)$$

   e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che

   $$\nabla f(2, 1) = (-2, 1).$$

   Allora si ha $(f \circ \mathbf{r})'(0) = \overline{}$.

6. **2021-07-06**

   Sia A l'insieme di definizione della funzione

   $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - |x^2 - 2x + y^2|}}$$

   .

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

   L'insieme A è aperto e connesso per poligonali.

Vera
Falsa

L'insieme A è convesso

Vera
Falsa

$\overline{A} = \overline{B}_{\sqrt{2}}(1,0)$

Vera
Falsa

$\partial A = \partial B_{\sqrt{2}}(1,0)$

Vera
Falsa

$(1,0)$ è un punto di accumulazione per A.

Vera
Falsa

I punti di minimo di f sono i punti di $\partial B_1(1,0)$.

Vera
Falsa

7. **2021-07-07**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

f è continua in $(0,0)$

Vera
Falsa

f è derivabile in $(0,0)$

Vera
Falsa

f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni

Vera
Falsa

8. **2021-07-08**

Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazione

$$x^4 + y^4 + 2x^2y - 1 = 0.$$

L'equazione della retta tangente alla curva in $P_0 = (0,1)$ è

$$ax + by - 1 = 0$$

con $a =$ ___ e $b =$ ___.

Verificate che in un intorno di P_0 la curva $\mathcal{C}$ è grafico di $y = \varphi(x)$ per un'opportuna funzione φ.

Stabilite per ciascuna delle seguenti due affermazioni se è vera o falsa.

La funzione φ ha un punto critico in $x_0 = 0$

Vera
Falsa

La funzione φ ha un punto di minimo stretto in $x_0 = 0$

Vera
Falsa

Infine il polinomio di Taylor di ordine 2 di φ in $x_0 = 0$ è

$$P_2(x) = a + bx + \frac{cx^2}{2}$$

con $a =$ ___, $b =$ ___ e $c =$ ___.

9. **2021-07-09**

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = e^{y-x}(y^2 - 2x^2).$$

I punti critici di f sono $P_1 = ($ ___ $, 0)$ e $P_2 = ($ ___ $, -4)$.

P_1 è un punto di

massimo locale
minimo locale
sella

P_2 è un punto di

massimo locale
minimo locale
sella

Stabilite per ciascuna delle seguenti due affermazioni se è vera o falsa.

f ammette massimo assoluto nel dominio di definizione

Vera
Falsa

f ammette minimo assoluto nel dominio di definizione

Vera
Falsa

10. **2021-07-10**

    Sia $f(x,y) = 4xy$ e sia $\mathcal{C}$ la curva data dall'equazione $x^2+xy+y^2-3 = 0$.

    Allora si ha $\min\limits_{\mathcal{C}} f = \overline{}$ e $\max\limits_{\mathcal{C}} f = \overline{}$.

    I punti di massimo sono ($\overline{}$, 1) e ($\overline{}$, −1).

11. **2021-07-11**

    Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $(0,0)$.

    Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

    f è continua in $(0,0)$ | Sì | No |

    f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni | Sì | No |

    $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = f(0,0)$ | Sì | No |

    $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\mathbf{0}+t\mathbf{e_1})-f(\mathbf{0})}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\mathbf{0}+t\mathbf{e_2})-f(\mathbf{0})}{t}$ | Sì | No |

12. **2021-07-12**

    Per $a = \overline{}$ si ha

    $$\int_{-2}^{\pi^2-2} \sqrt{x+2}\ \cos\sqrt{x+2}\ dx = a\pi$$

13. **2021-07-13**

    L'insieme dei numeri reali positivi α per cui l'integrale

    $$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{x^\alpha}\sqrt[4]{|1-x^2|^\alpha}}\ dx$$

    risulta convergente è l'intervallo $]a,b[$ di estremi $a = \overline{}$ e $b = \overline{}$.

14. **2021-07-14**

Sia S l'insieme delle soluzioni complesse del sistema

$$\begin{cases} |\overline{z}-1| = z+i \\ w^3 = |z|^2 . \end{cases}$$

Allora

il numero di elementi di S è ___;

per ogni soluzione $(z,w) \in S$ si ha $z = a + bi$ con $a =$ ___ e $b =$ ___;

esiste una soluzione $(z,w) \in S$ tale che $\operatorname{Im} w = 0$

Vero
Falso

per la soluzione $(z,w) \in S$ nel secondo quadrante si ha $w = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{2\pi}{k}}$ con $r =$ ___ e $k =$ ___.

15. **2021-07-15**

Sia α il numero reale positivo per cui esiste finito diverso da 0 il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{6\cos x - 3\sin x - 6\log[(1+x)^{\frac{1}{x}}]}{x^\alpha}.$$

Allora si ha $\alpha =$ ___ e per tale valore di α il limite vale ___.