

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica

TERZO APPELLO DI ANALISI MATEMATICA A

a.a. 2020/21 - Trento, 6 Settembre 2021

1. Vedi A5_06_09 Es.1

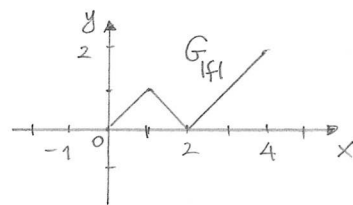
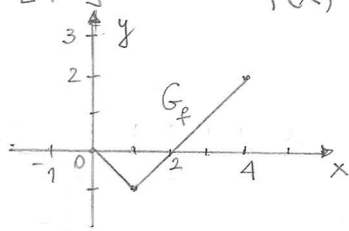
2. " Es.6

3. " Es.8

4. " Es.9

5. " Es.10

6. $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x-1| - 1$



Allora mi ha $\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0,4]} |f(x)| = 2$;

$$\|f\|_1 = \int_0^4 |f(x)| dx = \frac{1 \cdot 1}{1} + \frac{2 \cdot 2}{1} = 3.$$

7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. $f_{\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

• Abbiamo

$$0 \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} |y|^{\alpha-1} \leq |y|^{\alpha-1} \quad \checkmark 0 \text{ se } \alpha > 1$$

Quindi f_{α} è continua se $\alpha > 1$. Notiamo che se

$\alpha = 1$: mi ha $f_1(x,y) = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$; segue subito

che $f_1(0,y) = 1 \quad \forall y \neq 0$ e $\lim_{y \rightarrow 0} f_1(0,y) = 1 \neq 0$ e quindi f_1 non è continua in $(0,0)$.

$0 < \alpha < 1$: mi ha $f_{\alpha}(x,y) = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{|y|^{1-\alpha}} \quad \forall (x,y) \neq (x,0)$
 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

In particolare $f_\alpha(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{|x|^{1-\alpha}} \quad \forall x \neq 0$

e $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x, x) = +\infty$; quindi f_α non è continua in $(0, 0)$.

$\alpha = 0$: si ha $f_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \neq (0, 0)$; in particolare

$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}|x|} = +\infty$; e quindi f_0 non è continua in $(0, 0)$.

Dunque $C_\alpha = \{\alpha \geq 0 : f_\alpha \text{ è continua in } (0, 0)\} =]1, +\infty[$.

Allora $\inf C_\alpha = 1$. Tale estremo inferiore è un minimo. (F).

• Sia $\alpha > 0$: risulta $\frac{f_\alpha(h, 0) - f_\alpha(0, 0)}{h} = 0$

quindi $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0, 0) = 0$;

Oss. che $\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0, 0)$ implica $f_\alpha(0, y)$ continua in $(0, 0)$; quindi deve essere sicuramente $\alpha > 1$. Inoltre risulta

$$\forall h \neq 0 \quad \frac{f_\alpha(0, h) - f_\alpha(0, 0)}{h} = \frac{|h|^{\alpha-1}}{h} = |h|^{\alpha-2} \frac{|h|}{h}$$

Allora $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(0, h) - f_\alpha(0, 0)}{h}$ se e solo se $\alpha - 2 > 0$.

Dunque $D_\alpha = \{\alpha \geq 0 : f_\alpha \text{ è derivabile in } (0, 0)\} =]2, +\infty[$.

Allora $\inf D_\alpha = 2$. Tale estremo inferiore è un minimo (F).

8. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che nel pt. $(0, 0)$ ammette tutte le derivate direzionali. Allora

• f è derivabile in $(0, 0)$ (SI)

infatti, dalle ipotesi segue in particolare che $\exists$ la derivata in $(0, 0)$ lungo la direzione $v = e_1$ e $v = e_2$. $\square$

• f ammette piano tangente al grafico nel pt. $(0, 0, f(0, 0))$ (No)
 f non è necessariamente differenziabile in $(0, 0)$.

Basta prendere $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

si ha $f_x(0,0) = 0$

$f_y(0,0) = 0$; $\forall \underline{h} \neq 0$

$$\frac{f(\underline{0} + \underline{h}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

In particolare $g(\underline{h}) = \frac{h_1^3}{2h_1^2 \sqrt{2} |h_1|} = \frac{h_1}{2\sqrt{2} |h_1|} \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$. □

• Oss. considerando sempre $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

che $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{0} + t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \frac{v_1 v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)^{3/2}}}{t^2 (v_1^2 + v_2^2)^{1/2}} = v_1 v_2^2 \neq 0$ se $\begin{matrix} v_1 \neq 0 \\ v_2 \neq 0 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{matrix}$

mentre $\langle \nabla f(\underline{0}), \underline{v} \rangle = 0 \quad \forall \underline{v}$ direzione in $\mathbb{R}^2$.

Quindi

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{0} + t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t} = \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{v} \rangle \quad \forall \text{ direzione } \underline{v} \text{ in } \mathbb{R}^2$ (No) No □

• Esiste finito $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t \|\underline{v}\|}$ per ogni vettore $\underline{v}$ non nullo in $\mathbb{R}^2$ (Si) Si

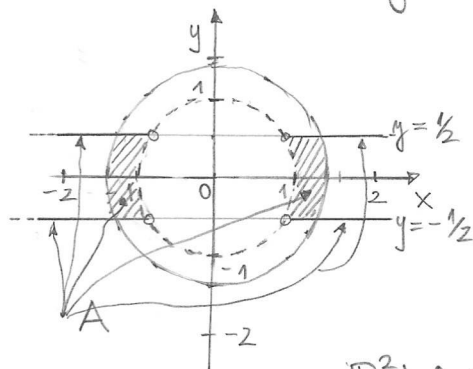
Infatti $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t \|\underline{v}\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(t \|\underline{v}\| \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}\right) - f(\underline{0})}{t \|\underline{v}\|}$

$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f\left(s \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}\right) - f(\underline{0})}{s}$ e quest'ultimo limite esiste finito $= D_{\underline{v}} f(\underline{0})$

con $\underline{\underline{v}} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$ per ipotesi. ■

9. Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1-2|y|} \log(x^2+y^2-1) \leq 0\}$
 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-2|y| = 0, x^2+y^2-1 > 0\}$
 $\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-2|y| > 0, 0 < x^2+y^2-1 \leq 1\}$
 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = \frac{1}{2}, x^2+y^2 > 1\}$
 $\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}, 1 < x^2+y^2 \leq 2\}$

Abbiamo la seguente rappresentazione grafica di A , da cui si può dedurre facilmente:



- $(1,0)$ è un pt. di frontiera di A (V)
- $A = \bar{A}$ (F)
- $\bar{A}$ è compatto (F) (A chiuso, ma non limitato)
- $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è connesso per poligonalità (F)
- A è convesso (F) (per es. $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$ appartengono ad A , ma il segmento congiungente tali pt. non è contenuto in A).

- $\forall x \in A, \exists r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$ (F) (basta prendere per es. $(\sqrt{2}, 0) \in A$; $\forall r > 0 \exists$ uno $y \in B_r(x)$ con $y \in \mathbb{R}^2 \setminus A$: possiamo prendere semplic. $y = (\sqrt{2} + \frac{r}{2}, 0)$). ■

10. $f(x,y) = (x^2 - y) \log(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \log(x+y) + \frac{x^2 - y}{x+y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\log(x+y) + \frac{x^2 - y}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1.$$

Dal teorema del differenziale totale segue subito che f è differenziabile in $(1,0)$. Inoltre $\nabla f(1,0) \neq (0,0)$. La direzione

lungo cui è minima la crescita della funzione f in $(1,0)$ è

$$\underline{v} = - \frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Da

$$(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{segue } \underline{\vartheta} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Risposta: (C). ■

11. Sia $f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$
 $= (x^2 + 3yz, y^2 + 4xz, -2z^2).$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underline{\underline{\operatorname{div} f(1,1,1)}} &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,1) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,1) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(1,1,1) \\ &= 2x|_{(1,1,1)} + 2y|_{(1,1,1)} - 4z|_{(1,1,1)} = 2+2-4 \\ &= \underline{\underline{0}}. \end{aligned} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underline{\underline{\Delta f_2(1,1,1)}} &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(1,1,1) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(1,1,1) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}(1,1,1) \\ &= 0 + 2 + 0 = \underline{\underline{2}} \end{aligned} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \|\nabla f_3(1,1,1)\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}(1,1,1)\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(1,1,1)\right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial z}(1,1,1)\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2} = \underline{\underline{4}}. \end{aligned} \quad \square$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \underline{\underline{D_v f_3(1,1,1)}} &= \langle \nabla f_3(1,1,1), v \rangle = \langle (0, 0, -4), \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 0, 1) \rangle \\ &\quad \begin{array}{l} \uparrow \\ f_3 \text{ è differenziabile} \end{array} \quad = \underline{\underline{-2}}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

12. Un vettore normale al piano tangente al grafico di una funzione f in due variabili relativ. al pt. (x_0, y_0) è dato da $\underline{n} = (\nabla f(x_0, y_0), -1)$.
Pertanto cerchiamo i pt. del grafico per i quali il vettore $\underline{n}$ è parallelo al vettore della retta data, richiedendo che $\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4\lambda \quad -1 = \frac{1}{2}\lambda.$$

Dall'ultima eq. si ricava $\lambda = -2$, così che le prime due eq. diventano

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \\ 8y &= -8. \end{aligned}$$

Ricaviamo allora $\underline{\underline{x_0 = 1}}, \underline{\underline{y_0 = -1}}, \underline{\underline{z_0 = f(x_0, y_0) = 5}}.$ $\blacksquare$

13. Abbiamo $\underline{r}: [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\underline{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t, 2 \sin t).$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Abbiamo } \|\underline{r}(t)\| &= \sqrt{(\sqrt{2} \cos t)^2 + (\sqrt{2} \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} \\ &= \sqrt{2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = 2 \quad \forall t \in [0, 2\pi[\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \underline{r} \subset \partial B_\delta(0) \text{ con } \underline{\underline{\delta = 2}}. \quad \square$$

- Abbiamo $\underline{r}'(t) = (-\sqrt{2} \sin t, -\sqrt{2} \sin t, 2 \cos t) \quad \forall t \in [0, 2\pi[$

$$\text{Risulta } \underline{\underline{\| \underline{r}'(t) \| = \sqrt{(-\sqrt{2} \sin t)^2 + (-\sqrt{2} \sin t)^2 + 4 \cos^2 t}}}$$

$$= 2 \quad \forall t \in [0, 2\pi[. \quad \square$$

- La curva non è singolare per qualche $t \in [0, 2\pi[$

Infatti $\underline{r}'(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in [0, 2\pi[$ (vedi pt. precedente). $\square$

- Oss. che $\underline{r}(t_0) = (1, 1, \sqrt{2})$ per $t_0 \in [0, 2\pi[$ se $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{Risulta } \underline{r}'(t_0) = \underline{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= (-1, -1, \sqrt{2})$$

L'eq. parametrica della retta tangente al sostegno della curva nel pt. $(1, 1, \sqrt{2})$ è

$$\begin{aligned} x &= a + bs \\ y &= c + ds \\ z &= \sqrt{2} + \sqrt{2}s. \end{aligned}$$

$s \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \underline{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)s \\ s &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right)$$

con $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=-1$. $\blacksquare$

14. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = 8x^2 + y^4(1-x).$

Oss. che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ (anzi $\mathcal{C}^\infty$). Abbiamo che

$$\nabla f(x, y) = (16x - y^4, 4y^3(1-x)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Allora } \nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} 16x - y^4 = 0 \\ 4y^3(1-x) = 0. \end{cases}$$

Ora $4y^3(1-x) = 0 \iff y=0$ oppure $x=1$ e quindi

dalla prima eq. segue che i pt. critici di f sono $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(1, 2)$.

- Quindi la funzione f ha 3 punti critici. $\square$

- Per determinare la natura del pt. critico lo studio della matrice hessiana $H_f(x, y)$ in $(0, 0)$ purtroppo non porta a nulla. Infatti

$$f_{xx}(x, y) = 16 \quad f_{xy}(x, y) = -4y^3$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2(1-x)$$

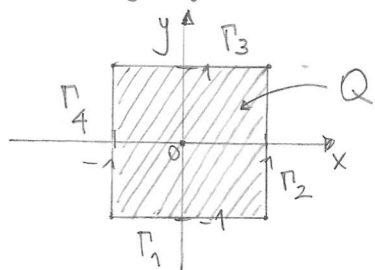
e quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $H_f(0,0)$ è semi definita positiva, possiamo afferire solo che $(0,0)$ non può essere un pt. di massimo locale, ma null'altro.

Notiamo però facilmente che $f(0,0)=0$, mentre $f(x,y) \geq 8x^2 + \frac{1}{2}y^2$ $\forall (x,y) \in B_{\frac{1}{4}}(0)$ (infatti, da $x^2+y^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4}$, da cui $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ e quindi $\frac{3}{2} > 1-x > \frac{1}{2}$), e dunque $f(x,y) > 0$ $\forall (x,y) \in B_{\frac{1}{4}}(0) \setminus \{0\}$. Risulta quindi che il pt. critico $(0,0)$ è un punto di minimo locale. $\square$

- $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ = quadrato di centro $(0,0)$ e lato 2



Oss. che f è una funzione continua su un compatto (Q è chiuso e limitato!); per il teorema di Weierstrass assume massimo e minimo su Q .

Oss. che $f(0,0)=0$, mentre $f(x,y) > 0$ altrimenti su Q ; quindi $\min_Q f = 0$ (e pt. di minimo è $(0,0)$).

Poiché non esistono altri punti critici in $\overset{\circ}{Q}$, il massimo di f sarà assunto sul bordo di Q : $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Osservando la funzione f si deduce facilmente che in particolare il massimo sarà assunto su $\Gamma_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=-1, -1 \leq y \leq 1\}$ poiché $f|_{\Gamma_4}(x,y) = 8 + 2y^4$, $y \in [-1,1]$. Conoscendo bene il grafico della funzione $g(y) = 2y^4$ abbiamo immediatamente $\max_Q f = 10$ e i pt. di massimo in Q sono $(-1,-1)$ e $(-1,1)$. $\blacksquare$

15. Sia $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x,y,z) = x^2 - 2x + e^z + \sin z - 2y^2$$

Risulta che $g(1,0,0) = 1 - 2 + 1 + 0 - 0 = 0$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = e^z + \cos z$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(1,0,0) = 1+1=2 \neq 0.$$

Allora è possibile applicare il teorema della funzione implicita nel pt. $(1,0,0)$. Sia $z = \varphi(x,y)$ la funzione definita implicitamente dall'eq. $g(x,y,z)=0$ in un intorno di $(1,0,0)$; quindi $z = \varphi(x,y)$ è definita in un intorno U del pt. $(x_0,y_0)=(1,0)$ ed è di classe C^∞ :

abbiamo

$$(*) \quad \begin{cases} \varphi(1,0) = 0 \\ g(x,y, \varphi(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in U. \end{cases}$$

Usiamo direttamente l'eq. in $(*)$ per determinare tutte le derivate prime e seconde della funzione φ . Abbiamo

$$x^2 - 2x + e^{\varphi(x,y)} + \sin \varphi(x,y) - 2y^2 = 0 \quad \forall (x,y) \in U,$$

da cui derivando rispetto a x (e risp. rispetto a y) si ottiene

$$(**) \quad \begin{cases} 2x - 2 + \varphi_x(x,y)e^{\varphi(x,y)} + \varphi_x(x,y)\cos \varphi(x,y) = 0 & \forall (x,y) \in U \\ \varphi_y(x,y)e^{\varphi(x,y)} + \varphi_y(x,y)\cos \varphi(x,y) - 4y = 0 & \forall (x,y) \in U. \end{cases}$$

In particolare, in $(1,0)$ risulta (si ricordi che $\varphi(1,0)=0$)

$$\varphi_x(1,0) = 0 \quad \varphi_y(1,0) = 0.$$

La funzione φ ha un pt. critico in $(1,0)$.

(V)

- Calcolando la derivata rispetto a x di $(**)_1$, rispetto a y di $(**)_1$ e rispetto a y di $(**)_2$ si ha rispettiv., $\forall (x,y) \in U$

$$\begin{aligned} 2 + \varphi_{xx}(x,y)e^{\varphi(x,y)} + \varphi_x^2(x,y)e^{\varphi(x,y)} + \varphi_{xx}(x,y)\cos \varphi(x,y) - \varphi_x^2(x,y)\sin \varphi(x,y) &= 0 \\ \varphi_{yx}(x,y)e^{\varphi(x,y)} + \varphi_x(x,y)\varphi_y(x,y)e^{\varphi(x,y)} + \varphi_{yx}(x,y)\cos \varphi(x,y) - \varphi_x(x,y)\varphi_y(x,y) \cdot \sin \varphi(x,y) &= 0 \\ \varphi_{yy}(x,y)e^{\varphi(x,y)} + \varphi_y^2(x,y)e^{\varphi(x,y)} + \varphi_{yy}(x,y)\cos \varphi(x,y) - \varphi_y^2(x,y)\sin \varphi(x,y) - 4 &= 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\varphi_{xx}(1,0) = -1 \quad \varphi_{yx}(1,0) = 0 \quad \varphi_{yy}(1,0) = 2$$

Allora

$$H_{\varphi}(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \det H_{\varphi}(1,0) = -2 < 0 \quad !$$

La matrice hessiana di φ in $(1,0)$ è definita negativa (F).

- Infine il polinomio di Taylor di φ in $(1,0)$ di ordine 2 si scrive

$$P_{2,(1,0)}(x,y) = \varphi(1,0) + \varphi_x(1,0)(x-1) + \varphi_y(1,0)y + \frac{1}{2} [\varphi_{xx}(1,0)(x-1)^2 + 2\varphi_{yx}(1,0)(x-1)y + \varphi_{yy}(1,0)y^2].$$

Quindi risulta

$$P_{2,(1,0)}(x,y) = 0 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot y + \frac{1}{2} [-1 \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (x-1)y + 2y^2]$$

$$\text{ossia } a(x-1) + by + \frac{1}{2} [c(x-1)^2 + d(x-1)y + ey^2]$$

$$\text{con } \underline{a=0, b=0, c=-1, d=0, e=2.} \quad \blacksquare$$