

Esercizi 28 Lez 22/12 pag. 382

Es.1 Trovate l'integrale generale delle seg. eq. differenziali del 2° ordine complete

i)  $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(7\cos x + \sin x)$

ii)  $y'' - 6y' + 9y = 6xe^{3x}$ .

i) • Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea

$$y'' - 2y' + 2y = 0. \text{ L'eq. caratteristica associata } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\text{ha le seguenti soluzioni } z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Allora l'integrale generale dell'eq. diff.  $y'' - 2y' + 2y = 0$  è

$$\text{dato da } y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

• Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'eq. diff. completa

usando il metodo di omogeneità. Poiché  $f(x) = e^{2x}(7\cos x + \sin x) =$

$f_1(x) + f_2(x)$  con  $f_1(x) = 7e^{2x}\cos x$  e  $f_2(x) = e^{2x}\sin x$ , e  $\xi = 2+i$  non è una radice

caratteristica cerchiamo per  $y'' - 2y' + 2y = f_i(x)$  una soluzione particolare

della forma  $\bar{y}_i(x) = \bar{a}_i e^{2x} \cos x + \bar{b}_i e^{2x} \sin x$  con  $\bar{a}_i, \bar{b}_i \in \mathbb{R}$  da determ.,  $i=1,2$ .

$$\text{Poiché } \bar{y}'_i(x) = 2\bar{a}_i e^{2x} \cos x - \bar{a}_i e^{2x} \sin x + 2\bar{b}_i e^{2x} \sin x + \bar{b}_i e^{2x} \cos x$$

$$\bar{y}''_i(x) = 4\bar{a}_i e^{2x} \cos x - 2\bar{a}_i e^{2x} \sin x - 2\bar{a}_i e^{2x} \sin x - \bar{a}_i e^{2x} \cos x \\ + 4\bar{b}_i e^{2x} \sin x + 2\bar{b}_i e^{2x} \cos x + 2\bar{b}_i e^{2x} \cos x - \bar{b}_i e^{2x} \sin x$$

si ha che  $\bar{y}_i$  è soluzione di  $y'' - 2y' + 2y = f_i(x) \iff$

$$3\bar{a}_i e^{2x} \cos x + 4\bar{b}_i e^{2x} \cos x - 4\bar{a}_i e^{2x} \sin x + 3\bar{b}_i e^{2x} \sin x$$

$$- 4\bar{a}_i e^{2x} \cos x + 2\bar{a}_i e^{2x} \sin x - 4\bar{b}_i e^{2x} \sin x - 2\bar{b}_i e^{2x} \cos x$$

$$+ 2\bar{a}_i e^{2x} \cos x + 2\bar{b}_i e^{2x} \sin x = f_i(x)$$

$$\text{In particolare, per } i=1, \text{ si ha } \begin{cases} \bar{a}_1 + 2\bar{b}_1 = 7 \\ -2\bar{a}_1 + \bar{b}_1 = 0 \end{cases} \iff \bar{a}_1 = \frac{7}{5}, \bar{b}_1 = \frac{14}{5};$$

$$\text{per } i=2, \text{ si ha } \begin{cases} \bar{a}_2 + 2\bar{b}_2 = 0 \\ -2\bar{a}_2 + \bar{b}_2 = 1 \end{cases} \iff \bar{a}_2 = -\frac{2}{5}, \bar{b}_2 = \frac{1}{5}.$$

Quindi l'integrale generale dell'eq. data in i) è

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{7}{5} e^{2x} \cos x + \frac{14}{5} e^{2x} \sin x - \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} e^{2x} \sin x$$

ossia

$$\underline{y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + e^{2x} \cos x + 3 e^{2x} \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \square}$$

ii) • Determiniamo innanzitutto l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea

$y'' - 6y' + 9y = 0$ , L'eq. caratteristica associata  $z^2 - 6z + 9 = 0$  ha

la soluzione  $z = 3$  con molteplicità 2. Allora l'integrale generale

dell'eq. diff. omogenea è  $\underline{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.}$

• Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'eq. diff. completa usando

il metodo di similitudine. Poiché  $f(x) = 6x e^{3x}$  e  $\lambda = 3 + i0$  è una

radice caratteristica di molteplicità 2 cerchiamo per  $y'' - 6y' + 9y = f(x)$

una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = x^2 (\bar{a}x + \bar{b}) e^{3x} \quad \text{con } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R} \text{ da determinare.}$$

Da  $\bar{y}(x) = (\bar{a}x^3 + \bar{b}x^2) e^{3x}$  segue

$$\bar{y}'(x) = (3\bar{a}x^2 + 2\bar{b}x) e^{3x} + 3(\bar{a}x^3 + \bar{b}x^2) e^{3x}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) = & (6\bar{a}x + 2\bar{b}) e^{3x} + 3(3\bar{a}x^2 + 2\bar{b}x) e^{3x} + 3(3\bar{a}x^2 + 2\bar{b}x) e^{3x} \\ & + 9(\bar{a}x^3 + \bar{b}x^2) e^{3x} \end{aligned}$$

quindi  $\bar{y}$  è soluzione di ii)  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (6\bar{a}x + 2\bar{b}) + 6(3\bar{a}x^2 + 2\bar{b}x) + 9(\bar{a}x^3 + \bar{b}x^2) - 6(3\bar{a}x^2 + 2\bar{b}x) - \\ - 18(\bar{a}x^3 + \bar{b}x^2) + 9(\bar{a}x^3 + \bar{b}x^2) = 6x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 6\bar{a} = 6, \quad 2\bar{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = 1, \quad \bar{b} = 0.$$

Quindi l'integrale generale dell'eq. diff. data in ii) è

$$\underline{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + x^3 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare}$$

Es. 2 Risolvere il seguente probl. di Cauchy

$$a) \begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -e^2. \end{cases}$$

Ricerca della soluzione particolare dell'eq. diff. completa usando il metodo della variazione delle costanti!

L'eq. diff. omogenea  $y'' - 4y' + 4y = 0$  ha eq. caratteristica  $z^2 - 4z + 4 = 0$ , che ha soluzione  $z = 2$  (con molteplicità 2). Quindi, le soluzioni fondamentali sono  $y_1(x) = e^{2x}$  e  $y_2(x) = xe^{2x}$ . Abbiamo la matrice

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det W = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x};$$

inoltre

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ \frac{e^{2x}}{x^2} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix}}{e^{4x}} = -\frac{e^{4x}}{xe^{4x}} = -\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow c_1(x) = -\log x \quad \text{per } x > 0 \quad \text{oss. che } 1 \in ]0, +\infty[ \text{ pt. iniziale}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{e^{2x}}{x^2} \end{vmatrix}}{e^{4x}} = \frac{e^{4x}}{x^2 e^{4x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow c_2(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{per } x > 0.$$

Quindi, l'integrale generale dell'eq. diff. data è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - (\log x) e^{2x} - \left(\frac{1}{x}\right) x e^{2x}, \quad \text{ovvia}$$

$$\underline{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - (\log x) e^{2x} - e^{2x}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

$$\text{Notiamo che } y(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = c_1 e^2 + c_2 e^2 - e^2$$

$$y'(1) = -e^2 \Leftrightarrow -e^2 = 2c_1 e^2 + c_2 e^2 + 2c_2 e^2 - e^2 - 2e^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 - 1 \\ -1 = 2c_1 + 3c_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

Quindi, la soluzione del probl. di Cauchy dato è

$$\underline{y(x) = -(\log x) e^{2x}}, \quad x > 0.$$



Risolvere il pblm. di Cauchy

$$b) \begin{cases} y'' - 8y' + 16y = e^{4x} \log x \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Ricerca della soluzione particolare dell'eq. diff. completa usando il metodo della variazione delle costanti!

L'eq. diff. omogenea  $y'' - 8y' + 16y = 0$  ha eq. caratteristica  $z^2 - 8z + 16 = 0$ , che ha soluzione  $z = 4$  (con molteplicità 2). Quindi, le soluzioni fondamentali sono  $y_1(x) = e^{4x}$  e  $y_2(x) = x e^{4x}$ . Allora la matrice Wronskiana risulta

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4x} & x e^{4x} \\ 4e^{4x} & e^{4x} + 4x e^{4x} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \det W(x) = e^{8x};$$

inoltre

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{4x} \\ e^{4x} \log x & e^{4x} + 4x e^{4x} \end{vmatrix}}{e^{8x}} = - \frac{x(\log x) e^{8x}}{e^{8x}} = -x \log x \quad \text{per } x > 0$$

$$\Rightarrow c_1(x) = - \int x \log x \, dx = - \frac{x^2}{2} \log x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} \quad \text{per } x > 0$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{4x} & 0 \\ 4e^{4x} & e^{4x} \log x \end{vmatrix}}{e^{8x}} = \frac{e^{8x} \log x}{e^{8x}} = \log x, \quad x > 0$$

Oss. che  $1 \in ]0, +\infty[$   
pt. iniziale

$$\Rightarrow c_2(x) = \int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x(\log x - 1) \quad \text{per } x > 0.$$

Quindi, l'integrale generale dell'eq. diff. data è

$$\underline{y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} + \left( \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \log x \right) e^{4x} + x^2 (\log x - 1) e^{4x}}, \quad x > 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

Ossia

$$\underline{y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x} - \frac{3}{4} x^2 e^{4x} + \frac{x^2}{2} \log x e^{4x}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} y(1) = 0 & \Leftrightarrow 0 = c_1 e^4 + c_2 e^4 - \frac{3}{4} e^4 \\ y'(1) = 0 & \Leftrightarrow 0 = 4c_1 e^4 + c_2 e^4 + 4c_2 e^4 - \frac{3}{2} e^4 - 3e^4 + \frac{1}{2} e^4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 - \frac{3}{4} \\ 0 = 4c_1 + 5c_2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = -\frac{1}{4} \quad c_2 = 1.$$

Risulta allora che la soluzione del probl. di Cauchy b) è

$$\underline{y(x) = \frac{e^{4x}}{4} (-1 + 4x - 3x^2 + 2x^2 \log x), \quad x > 0.}$$

Es. 3. Determinate la soluzione del probl. di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(x) - y'(x) = e^{2x} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0. \end{cases}$$

Poniamo  $u(x) = y'(x)$ . Allora l'eq. diff. data si riscrive

$$u'' - u = e^{2x}.$$

L'eq. diff. omogenea  $u'' - u = 0$  ha come eq. caratteristiche associate

l'eq.  $z^2 - 1 = 0$ , che ha come soluzioni  $z_{1,2} = \pm 1$ . Quindi l'integrale

generale dell'eq. omogenea  $u'' - u = 0$  è

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal metodo di omiliautà otteniamo inoltre, che la soluzione

particolare sarà della forma  $\bar{u}(x) = \bar{a} e^{2x}$ , da cui  $\bar{u}'(x) = 2\bar{a} e^{2x}$  e

$\bar{u}''(x) = 4\bar{a} e^{2x}$ . Inserendo nell'eq. completa  $u'' - u = e^{2x}$  si ottiene

$$4\bar{a} e^{2x} - \bar{a} e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{3},$$

ovvero  $\bar{u}(x) = \frac{1}{3} e^{2x}$ . Pertanto, l'integrale generale dell'eq. diff.

$u'' - u = e^{2x}$  è della forma

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{3} e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poiché  $y'(x) = u(x)$ , abbiamo  $y'(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{3} e^{2x}$  e

quindi  $y(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{1}{6} e^{2x} + c_3$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ , è

l'integrale generale dell'eq. diff. data  $y'''(x) - y'(x) = e^{2x}$ .

$$\text{Oss. che } \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c_1 + c_2 + \frac{1}{6} + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 0 \\ -c_1 + c_2 + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{1}{6}, \quad c_3 = \frac{1}{2}.$$

Quindi, l'unica soluzione del pbm. di Cauchy dato è  $y(x) = -\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}$ ,  
che può essere riscritta anche come  $y(x) = \frac{e^{-x}}{6}(e^x - 1)^3$ . □

Es. 4. i) Determinate, al variare di  $d \in \mathbb{R}$ , la soluzione  $y_d$  del pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + \frac{2}{x^2} \\ y(1) = d \end{cases}$$

ii) Studiate la funzione  $y_d$ , per  $d=3$  e  $d=-1$ , e rappresentatela graficamente

i) Abbiamo un'eq. diff. lineare del primo ordine  $y' = a(x)y + b(x)$  con  $a(x) = -\frac{1}{x}$   
 $b(x) = \frac{2}{x^2}$ .

Poiché il dato iniziale è  $x_0 = 1$ , consideriamo  $a(x)$  e  $b(x)$  sull'intervallo  $]0, +\infty[$ ,  
dove entrambe sono definite e continue.

Oss. che  $A(x) = \int a(x) dx = -\log x$ , e usando la formula risolutiva abbiamo

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log x} \left( c + \int \frac{2}{x^2} e^{\log x} dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( c + \int \frac{2}{x} \cdot x dx \right) = \frac{1}{x} (c + 2 \log x). \end{aligned}$$

Quindi l'integrale generale dell'eq. diff. data  $y' = -\frac{y}{x} + \frac{2}{x^2}$  è

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{2 \log x}{x}.$$

Imponendo  $y(1) = d$  si ricava  $d = y(1) = c$  e quindi, al variare  
di  $d \in \mathbb{R}$ , la soluzione  $y_d$  del pbm. di Cauchy assegnato è

$$\underline{y_d(x) = \frac{d}{x} + \frac{2 \log x}{x}} \quad \text{su } ]0, +\infty[.$$

□

ii) Se  $d=3$ , si ottiene che  $y_3(x) = \frac{3}{x} + \frac{2 \log x}{x}$  su  $]0, +\infty[$  è sol. del pbm. ii i)

Se  $d=-1$ , si ottiene che  $y_{-1}(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2 \log x}{x}$  su  $]0, +\infty[$  è sol. del pbm. ii i).

Studiamo la funzione  $y(x) \equiv y_3(x) = \frac{3}{x} + \frac{2 \log x}{x}$  in  $]0, +\infty[$ .

- segno di  $y(x)$ :  $y(x) = \frac{3+2 \log x}{x}$   $3+2 \log x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-3/2}$

- comportamento agli estremi di  $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = -\infty$$

$x=0$  asintoto verticale (da destra) per  $y(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$$

$y=0$  asintoto orizzontale per  $y(x)$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

- $y(x)$  è continua in  $]0, +\infty[$ ;

- $y(x)$  è derivabile in  $]0, +\infty[$ ;  $y'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (3+2 \log x)}{x^2} =$   
 $= \frac{-1-2 \log x}{x^2}$ .

Risulta che  $1+2 \log x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$  pt. critico per  $y(x)$

$x = e^{-1/2}$  pt. di max loc. forte per  $y(x)$

$$y(e^{-1/2}) = \frac{3+2 \log e^{-1/2}}{e^{-1/2}} = 2e^{1/2} \sim 3.3.$$

- $y'(x)$  è derivabile in  $]0, +\infty[$ ;  $y''(x) = \frac{-\frac{2}{x^2} \cdot x^2 + (1+2 \log x) \cdot 2x}{x^4}$   
 $= \frac{-2 + (1+2 \log x) 2}{x^3}$   
 $= \frac{+4 \log x}{x^3}.$

Si osserva subito che  $x=1$  è un pt. di flesso per  $y(x)$ .

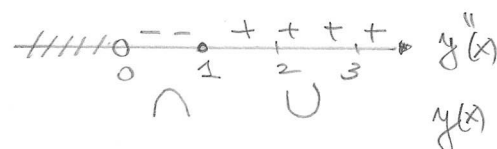
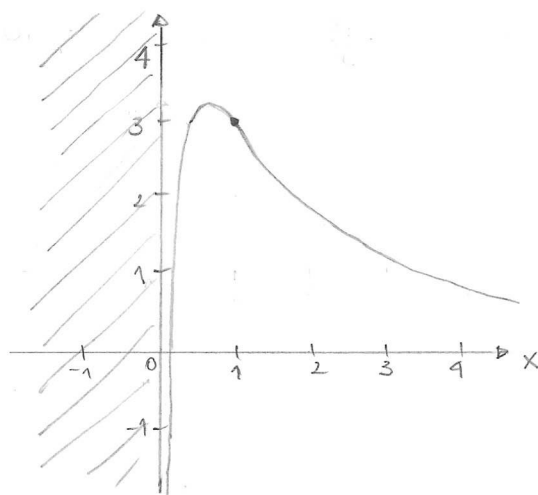
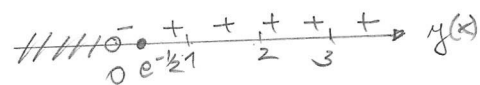


grafico qualitativo di  $y_3(x)$



Studiamo la funzione  $y(x) \doteq y_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{2 \log x}{x}$  in  $]0, +\infty[$ .

- segno di  $y(x)$ :  $y(x) = \frac{1+2 \log x}{x}$   $1+2 \log x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$



- comportamento agli estremi di  $]0, +\infty[$

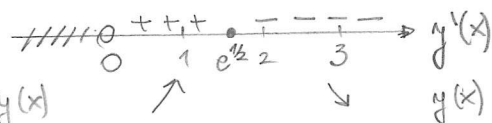
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = -\infty \quad x=0 \text{ asintoto verticale (da destra) per } y(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \quad y=0 \text{ asintoto orizzontale per } y(x), \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

- $y(x)$  è continua in  $]0, +\infty[$ ;

- $y(x)$  è derivabile in  $]0, +\infty[$ :  $y'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (1+2 \log x)}{x^2}$   
 $= \frac{1-2 \log x}{x^2}.$

Risulta che  $1-2 \log x = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$  pt. critico per  $y(x)$



$x = e^{\frac{1}{2}}$  pt. di max. loc. forte per  $y(x)$

$$y(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1+2 \log e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} \sim 1.2.$$

- $y'(x)$  è derivabile in  $]0, +\infty[$ :  $y''(x) = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^2 - (1-2 \log x) 2x}{x^4}$

$$= \frac{-2 - (1-2 \log x) 2}{x^3}$$

$$= \frac{-4 + 4 \log x}{x^3}.$$

Si osserva subito che  $x=e$  è un pt. di flesso per  $y(x)$

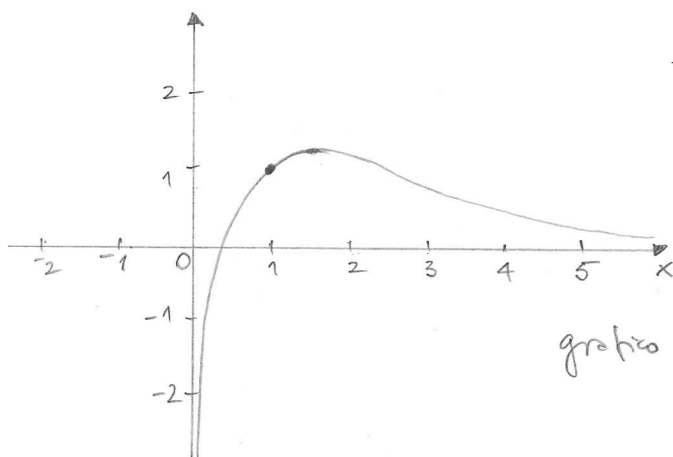
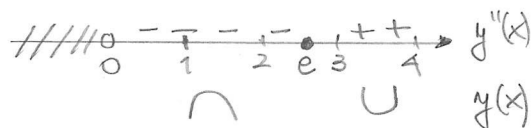


grafico qualitativo di  $y_1(x)$