

Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica - a.a. 2020-2021
Esercizi Paradigma 10 - MOD2 : “Estremi liberi e non solo”
(3 - 7 maggio 2021)

- 10.1) Classificate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la forma quadratica $Q(\mathbf{h}) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da
$$Q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 2\alpha h_1 h_2 + h_2^2 + 2\alpha h_2 h_3 + h_3^2.$$
- 10.2) Determinate gli eventuali punti di minimo e massimo, locali e globali, delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione:
- i) $x^2 y + x y^2 - x y$; ii) $x^4 + 3x^2 y^2 + y^4$;
iii) $e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$; iv) $y + x \sin y$.
- 10.3) Determinate i punti di estremo locale (eventualmente globale) della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Tracciate un grafico qualitativo di tale funzione.
- 10.4) Determinate i punti critici delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione, e determinate la loro natura:
- i) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$; ii) $f(x, y) = xy \log(xy^2) + x^2 y$;
iii) $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 + yz + z^3$.
- 10.5) Determinate gli eventuali punti di minimo e massimo, locali e globali, delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione:
- i) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$; ii) $f(x, y) = x^4 + \alpha x^2 y + y^2$, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$;
iii) $f(x, y, z) = 3x^2 + \log(2 + y^2) \log(2 + z^2)$.
- 10.6) Sia $f(x, y) = y(2x^2 - 3y)e^{4x+y}$.
- i) Determinate il segno di f .
ii) Determinate gli eventuali punti critici di f e la loro natura.
- 10.7) Determinate la natura dei punti critici di $f(x, y) = \alpha x^n + \beta y^n$ al variare di $n \geq 2$ ($\alpha\beta \neq 0$).
- 10.8) Sia $f(x, y) = e^{\frac{3}{2}x+y^2}(x - x^2 - y^2)$.
- i) Determinate gli eventuali punti di massimo/minimo locale e globale della funzione f su $\mathbf{R}^2$.
ii) La funzione è limitata superiormente? Inferiormente?
iii) Esistono $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali gli insiemi di sopralivello $E_\alpha = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) \geq \alpha\}$ non sono limitati?
- 10.9) Determinate il punto del piano $2x + y - z - 1 = 0$ che ha minima distanza dal punto $(1, 0, -1)$ (suggerisco di usare per lo svolgimento dell'esercizio la funzione distanza al quadrato).
- 10.10) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = x^2((x+1)^2 - y^2)$.
- i) Determinate il segno di f . Esiste $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y)$?
ii) Determinate gli eventuali punti di minimo/massimo locale/globale di f su $\mathbf{R}^2$.
iii) Determinate i punti di minimo/massimo di f su $C = \overline{B_1(\mathbf{0})} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- 10.11) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = 2xy(2 - x - y)$. Determinate i punti di minimo/massimo di f su $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4\}$.
- 10.12) Determinate massimo e minimo globale, se esistono, della funzione
$$f(x, y) = e^{-x^2}(-x + y)$$

nella striscia $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq 2\}$.