

Esercizi Paradigma 11 - MOD2 : “Funzioni vettoriali: curve e non solo, matrice jacobiana, ...”
(10 - 14 maggio 2021)

- 11.1) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + y^2}$.
- Determinate il segno di f .
 - Verificate se f può essere estesa con continuità in $(0, 0)$.
 - Verificate che f è positivamente omogenea di grado 0.
 - Sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$. Provate che f è limitata su B e determinate $\inf_B f$ e $\sup_B f$ e dite se sono minimo e massimo, rispettivamente. Determinate gli eventuali punti di minimo e di massimo di f su B .
- 11.2) Sia f la funzione definita su $B_1(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ da
- $$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x \sin y} & \text{se } (x, y) \in B_1(\mathbf{0}), x, y \geq 0 \\ -\sqrt{x \sin y} & \text{se } (x, y) \in B_1(\mathbf{0}), x, y \leq 0 \\ 0 & \text{altrimenti in } B_1(\mathbf{0}). \end{cases}$$
- Verificate che f è continua in $B_1(\mathbf{0})$.
 - La funzione f è differenziabile in $(0, 0)$? Esistono le derivate direzionali $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ per ogni direzione $\mathbf{v}$? Vale lo stesso per la funzione f^2 ?
- 11.3) Determinate gli eventuali punti di estremo locale delle funzioni
- $$f(x, y) = \sqrt{x - y^2} \log x; \quad g(x, y) = \sqrt{|x - y^2|} \log x.$$
- La funzione f ammette minimo assoluto? E la funzione g ?
- 11.4) Sia $\mathbf{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ la curva $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ (spirale logaritmica). Determinate l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P = (1, 0)$ e rappresentatela graficamente.
- 11.5) Determinate la retta tangente alla curva polare $\rho = \theta$ (spirale di Archimede) nei punti di intersezione con la retta $x = 0$.
- 11.6) Calcolate $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$, $\|\mathbf{r}'(t)\|$ e $\|\mathbf{r}''(t)\|$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^3$ definita da
- $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} - \sqrt{6} t^2 \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}$;
 - $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 2(\sin t) \mathbf{j} + 2(1 - \cos t) \mathbf{k}$.
- Date un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti.
- 11.7) i) Sia $\mathbf{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$. Rappresentate graficamente la curva $\mathbf{r}(t) = (1 + t, t^2)$ con $t \in \mathbf{R}$ e il vettore tangente alla curva per $t = 1$.
- ii) Sia $\mathbf{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$. Determinate l'equazione della retta tangente alla curva $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1, t + 1)$ nel punto $(-1, 1, 1)$.
- 11.8) Determinate una rappresentazione parametrica della curva $\mathcal{C}$ in $\mathbf{R}^3$ che si ottiene intersecando il cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con il piano $x + z = 2$, e rappresentatela.
- 11.9) i) Rappresentate graficamente il sostegno delle seguenti curve:
- $\mathbf{r} : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{r}(t) = (-1 + 2 \cos t) \mathbf{i} + (2 + 3 \sin t) \mathbf{j}$;
 - $\mathbf{r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, 2t)$.
- ii) Rappresentate graficamente il sostegno delle seguenti superfici parametriche:

- a) $\Phi : [0, 2] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \Phi(t, \theta) = (\cos \theta, t, \sin \theta);$
 b) $\Phi : [-2, 2] \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \Phi(t, \theta) = (|t| \cos \theta, |t| \sin \theta, t);$
 c) $\Phi : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \Phi(\theta, \varphi) = (2 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, 2 \cos \varphi) \quad (\text{coordinate sferiche}).$

11.10) Sia $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ la curva definita da $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$. Verificate che per ogni $t \in]0, 2\pi[$ si ha
 $\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0) \neq 2\pi \mathbf{r}'(t)$.

Osservate: Per le funzioni vettoriali **non** vale il teorema del valor medio (di Lagrange).

11.11) Siano $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ e $\mathbf{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ le funzioni definite da

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad \mathbf{r}(t) = (\cos 2t, 2 \sin 3t).$$

Calcolate $(f \circ \mathbf{r})'(t)$ per $t \in \mathbf{R}$.

11.12) Scrivete la matrice jacobiana delle seguenti funzioni vettoriali:

- i) $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \mathbf{f}(x, y) = \arctan(2x + y)\mathbf{e}_1 + \log(1 + x^2 + y^2)\mathbf{e}_2;$
 ii) $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \mathbf{f}(x, y) = (ye^{x^2}, \sin(x + y), \cos(xy));$
 iii) $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \mathbf{f}(x, y, z) = (zx^2)\mathbf{i} + (4x^2 + e^y)\mathbf{j} + (z^3 - x)\mathbf{k};$
 iv) $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4 \quad \mathbf{f}(x, y, z) = (z^2 + 1)\mathbf{e}_1 + xyz\mathbf{e}_2 + e^{x+yz}\mathbf{e}_3 + \cos(x + y + z)\mathbf{e}_4;$

11.13) i) Rappresentate graficamente le curve di equazioni polari

- a) $\rho = 2(1 - \cos \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (\text{cardioid});$
 b) $\rho = \cos 3\theta \quad (\text{trifoglio});$

ii) Date una rappresentazione parametrica delle curve in i).