

Esercizi Paradigma 13 - MOD2 : “Teorema del Dini (generale) e non solo”

(24 - 28 maggio 2021)

- 13.1) i) Determinate l'equazione della tangente alla curva di livello di

$$f(x, y) = 5 \arctan \frac{y}{x} - 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

passante per il punto $(-3, 4)$.

- ii) Determinate l'equazione del piano tangente alla superficie di livello di

$$f(x, y, z) = xy^3 - 2x^2z - 3xyz^2$$

passante per il punto $(1, -1, 2)$.

- 13.2) i) Provate che esiste una soluzione $y = \varphi(x)$ di classe C^∞ in un intorno di $x_0 = 0$ dell'equazione $\varphi^3(x) + (x^2 + 1)\varphi(x) - x^2 = 0$.

- ii) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 2 di φ centrato in x_0 .

- 13.3) Sia $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(x, y, z) = xyz + 3y - \frac{z^2}{2} + 3 - x^2$.

- i) Provate che l'equazione $g(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, -1, 0)$ una funzione $y = y(x, z)$ di classe C^∞ .

- ii) Provate che $(0, 0)$ è un punto critico per la funzione $y(x, z)$ e determinate la sua natura. Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione $y(x, z)$ centrato in $(0, 0)$.

- iii) Scrivete l'equazione del piano tangente alla superficie di livello Σ data da $g(x, y, z) = 0$ nel punto $(0, -1, 0)$.

- 13.4) Sia $g : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 - 1$.

- i) Provate che l'equazione $g(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(1, 1, 0)$ una funzione $x = x(y, z)$ di classe C^∞ .

- ii) Determinate l'equazione della retta normale al piano tangente al grafico di $x(y, z)$ nel punto $(1, 1, 0)$.

- 13.5) Sia $g : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(x, y, u, z) = x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2e^z$. Verificate che l'equazione $g(x, y, u, z) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0, 0, 1)$ un'unica funzione $z = z(x, y, u)$ di classe C^∞ . Provate che per tale funzione $(0, 0, 0)$ è punto critico. Determinate la natura di tale punto critico.

- 13.6) Sia dato il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x^2 + z^2 - y = 0 \end{cases}$,
del quale $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 1)$ è soluzione.

- i) Verificate che il sistema definisce implicitamente in un intorno del punto $\mathbf{x}_0$ due funzioni $y = y(x)$, $z = z(x)$ di classe C^∞ . Determinate $y'(0)$ e $z'(0)$.

- ii) Verificate che in questo caso si ha esplicitamente $y(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4x^2})$ e $z(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4x^2})$ per $x \in] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

- 13.7) Sia dato il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 - z = 0 \\ z - y + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$.

- i) Verificate che il sistema definisce implicitamente in un intorno di $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ una curva in $\mathbf{R}^3$.

- ii) Scrivete l'equazione parametrica della retta tangente a tale curva nel punto $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

- iii) Individuate una rappresentazione parametrica del sostegno della curva individuata dal sistema.

- 13.8) Sia $\mathbf{g} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la funzione vettoriale definita da $\mathbf{g}(x, y, z, w) = (y^2 + w^2 - 2xz, y^3 + w^3 + x^3 - z^3)$.

- i) Verificate che l'equazione $\mathbf{g}(x, y, z, w) = \mathbf{0}$ definisce implicitamente in un intorno di $(1, -1, 1, 1)$ una funzione $(y, w) \mapsto (\varphi(y, w), (\psi(y, w)))$ con $(\varphi(-1, 1), \psi(-1, 1)) = (1, 1)$.
 ii) Calcolate $\nabla\varphi(-1, 1)$ e $\nabla\psi(-1, 1)$.

13.9) i) Verificate che il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + zve^x - 2 = 0 \\ xe^z + ye^v - z + v = 0 \end{cases}$$

definisce implicitamente in un intorno del punto $(0, 0, 1, 1)$ un'unica funzione $(x, y) \mapsto (v(x, y), (z(x, y)))$.

ii) Calcolate la matrice jacobiana di tale funzione nel punto $(0, 0)$.

13.10) i) Sia $\mathbf{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ la curva definita da $\mathbf{r}(t) = (t|t|, t^2)$. Rappresentate il sostegno di $\mathbf{r}(t)$. Osservate che $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1$, ma che in $t = 0$ non esiste la retta tangente al sostegno della curva in $(0, 0)$. Osservate che $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$!

ii) Sia $\mathbf{r} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ la curva definita da $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$. Rappresentate il sostegno di $\mathbf{r}(t)$. Osservate che $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1$, ma che in $t = 0$ non esiste la retta tangente al sostegno della curva in $(0, 0)$. Osservate che $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$!

13.11) **Esercizio riepilogo ('linee regolari' in $\mathbf{R}^2$:** grafici, curve di livello, sostegno di curve)

i) Sia $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervallo e $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1(I)$. Sia $x_0 \in I$. Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

ii) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto e sia $g \in \mathcal{C}^1(A)$. Sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto regolare di g , cioè $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazione $g(x, y) = 0$. Scrivete l'equazione della retta tangente alla curva nel punto (x_0, y_0) .

iii) Sia $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ una curva di classe $\mathcal{C}^1$ regolare in $t_0 \in I$, cioè $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Scrivete le equazioni parametriche della retta tangente al sostegno della curva in $\mathbf{r}(t_0)$.

13.12) **Esercizio riepilogo ('superfici regolari' in $\mathbf{R}^3$:** grafici di funzioni, superfici di livello, sostegno di superfici parametriche)

i) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1(A)$. Sia $\mathbf{x}_0 \in A$. Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$.

ii) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^3$ aperto e sia $g \in \mathcal{C}^1(A)$. Sia $(x_0, y_0, z_0) \in A$ un punto regolare di g , cioè $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Sia Σ la superficie di livello $g(x, y, z) = 0$. Scrivete l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto (x_0, y_0, z_0) .

iii) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ aperto e sia $\Phi : A \rightarrow \mathbf{R}^3$ una funzione vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$. Sia $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0) \in A$ un punto regolare di Φ , cioè il rango di $J_\Phi(\mathbf{u}_0) = 2$. Si dimostra (non lo dovete fare!) che le equazioni parametriche del piano tangente al sostegno di Φ , cioè a $\Phi(A)$, nel punto $\Phi(\mathbf{u}_0)$ sono date da

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}_0) + t \frac{\partial \Phi}{\partial u}(\mathbf{u}_0) + s \frac{\partial \Phi}{\partial v}(\mathbf{u}_0),$$

ossia

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}_0) + J_\Phi(\mathbf{u}_0) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \quad t, s \in \mathbf{R}.$$