

- 1.1) Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Dimostrate che $\forall x, y \in V$ vale

$$||x| - |y|| \leq \|x - y\|.$$

- 1.2) Sia $I = [0, 1]$ e sia $d_\infty(f, g) = \max_{x \in I} |f(x) - g(x)|$ per ogni $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$. Calcolate $d_\infty(f, g)$ per le coppie

a) $f(x) = 4x^3 + 1$; $g(x) = 9x^2 - 6x$;

b) $f(x) = xe^{-x}$; $g(x) = e^x$.

- 1.3) Sia $I = [0, 1]$. Per ogni $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$ sia $d_\infty(f, g)$ come nell'esercizio 1.2) e $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$. Per ogni $k \in \mathbf{N}$ sia $f_k(x) = \max\{0, 1 - kx\}$ per $x \in [0, 1]$. Calcolate $d_\infty(f_k, 0)$ e $d_1(f_k, 0)$ e determinate poi $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_\infty(f_k, 0)$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_1(f_k, 0)$.

- 1.4) Sia $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_4$ la base ortonormale canonica di $\mathbf{R}^4$. Siano $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_4$ e $\mathbf{y} = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$. Determinate

$$\|\mathbf{x}\|_2; \quad \|\mathbf{y}\|_2; \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2; \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2; \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle; \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle,$$

dove $\|\cdot\|_2$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indicano la norma euclidea e il prodotto scalare euclideo di $\mathbf{R}^4$, rispettivamente.

- 1.5) Provate che la funzione $\|\cdot\| : \mathbf{R}^3 \rightarrow [0, +\infty[$ definita da

$$\|\mathbf{v}\| = |z| + \max\{|x|, |y|\} \text{ per ogni } \mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

è una norma in $\mathbf{R}^3$ e disegnate la palla unitaria chiusa.

- 1.6) Dite se le seguenti sono delle norme su $\mathcal{C}^2([0, 1])$:

a) $\max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| + |f(0)|$; b) $\max_{x \in [0, 1]} |f''(x)| + |f'(0)| + |3f(0)|$;

c) $\max_{x \in [0, 1]} |f''(x)| + |f(0)|$; d) $\max_{x \in [0, 1]} |f''(x)| + |f(0)| + |f(1)|$.

- 1.7) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ una funzione strettamente crescente tale che $\varphi(0) = 0$ e soddisfa $\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$ per ogni $a, b > 0$ (i.e. φ è subadditiva). Provate che la funzione $\varphi \circ d$ è una distanza su X .

- 1.8) Dite se le seguenti sono delle distanze in $\mathbf{R}$:

i) $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$; ii) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$; iii) $d(x, y) = |x - y|^2$; iv) $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$

per $x, y \in \mathbf{R}$.

- 1.9) Dite se le seguenti sono delle distanze in $\mathbf{R}^2$:

i) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |\arctan x_2 - \arctan y_2|$; ii) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 e^{x_2} - y_1 e^{y_2}|$

per $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

- 1.10) Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, e sia $X = X_1 \times X_2$ il prodotto cartesiano di X_1 e X_2 . Dimostrate che la funzione da $X \times X$ definita da $d(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ per $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, è una distanza su X .

1.11) Sia (X, d) uno spazio metrico. Provate che comunque presi $x, y, z \in X$ vale

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

cioè d soddisfa una disuguaglianza di lipschitzianità.

1.12) Sia $V = \mathcal{C}^0([a, b])$ e $\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ per $p \in \mathbf{R}$, $1 \leq p < +\infty$. Usando la disuguaglianza di Hölder integrale

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} \quad 1 < p, q < +\infty \text{ con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

provate che $\|\cdot\|_p$ è una norma (verifica la disuguaglianza di Minkowski!).

1.13) Provate che $V = \mathcal{C}^0([0, \frac{\pi}{2}])$ dotato della norma $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f(x)|$ non è euclideo, cioè non soddisfa l'identità del parallelogramma.

1.14) (difficile) Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato, la cui norma soddisfa l'identità del parallelogramma, ossia

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{per ogni } x, y \in V.$$

Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \text{per ogni } x, y \in V.$$

Provate che è un prodotto scalare e che per ogni $x \in V$ soddisfa $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.