

Esercizi Paradigma 3 - MOD2 : "Successioni a gogò e preliminari sulle funzioni reali di più variabili"
(08 - 12 marzo 2021)

3.1) Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se l'affermazione è vera, dimostratala o indicate il risultato di cui è conseguenza; se è falsa costruite un controesempio. A e B sono sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ (per i controesempi basta prendere $n = 1$).

- i) A (seq.) compatto, B chiuso $\implies A \cap B$ (seq.) compatto;
- ii) A aperto, B chiuso $\implies A \cap B$ chiuso;
- iii) A aperto, B aperto, $A \subseteq B \implies \partial A \subseteq B$;
- iv) A aperto, B chiuso, $A \subseteq B \implies \partial A \subseteq B$;
- v) A chiuso, B aperto, $A \subseteq B \implies \partial A \subseteq B$.

3.2) Provate che le seguenti successioni non verificano la condizione di Cauchy:

i) $(x_n)_n = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right)_n$ ii) $(s_n)_n$, dove $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $\forall n \geq 1$.

3.3) Dite se le seguenti successioni sono limitate. Determinate il limite inferiore (= minimo limite) e il limite superiore (= massimo limite) delle seguenti successioni:

i) $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$; ii) $x_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1}$; iii) $x_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$;
 iv) $0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$; v) $x_n = \left[\frac{n}{10}\right]$; vi) $x_n = \frac{n}{10} - \left[\frac{n}{10}\right]$.

3.4) Siano $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ due successioni di numeri reali limitate. Provate che

i) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n)$
 ii) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

Provate con degli esempi che le disuguaglianze in i) e in ii) possono essere strette.

3.5) Sia $(x_n)_n$ la successione di numeri reali positivi definita da $x_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$ Provate che

i) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$
 ii) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = 2$.

Osservate che $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

NOTA (solo informativa) : Si dimostra che una qualsiasi successione $(x_n)_n$ di numeri reali positivi soddisfa queste disuguaglianze; esse possono essere anche strette come potete osservare nell'esempio.

3.6) Sia $(\mathbf{x}_n)_n$ una successione a valori in $\mathbf{R}^m$. Se $\mathbf{x}_n$ converge a $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^m$, allora ogni sua sottosuccessione converge a $\hat{\mathbf{x}}$.

3.7) (Proprietà di Urysohn) Sia $(\mathbf{x}_n)_n$ una successione a valori in $\mathbf{R}^m$. Sia $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^m$ tale che

(*) ogni sottosuccessione di $(\mathbf{x}_n)_n$ ammette una sotto-sottosuccessione convergente a $\hat{\mathbf{x}}$.

Provate che allora tutta la successione $(\mathbf{x}_n)_n$ converge a $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^m$ (si proceda per assurdo).

3.8) Determinate gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni e rappresentateli sul piano cartesiano:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad f(x, y) &= \frac{xy}{\log(x^2 - y^2)}; & \text{ii)} \quad f(x, y) &= \frac{1}{|x|\sqrt{(y+1)^2 - x^2}}; & \text{iii)} \quad f(x, y) &= \arccos(x^2 + y^2 - 1); \\ \text{iv)} \quad f(x, y) &= \frac{\log(x\sqrt{y-x})}{xy-1}; & \text{v)} \quad f(x, y) &= \frac{1 + \sqrt{y(\sin x - 1)}}{\sqrt{y-x(x-4)}}; & \text{vi)} \quad f(x, y) &= \arctan \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}. \end{aligned}$$

3.9) Individuate la controimmagine $f^{-1}(]-\infty, 0])$ della funzione $f(x, y) = \log^2\left(\frac{x^2 + y^2}{2xy}\right) + \arccos\left(\frac{(x^2 + y^2)x^2}{y^2}\right)$.

3.10) Sia $f(x, y) = |x - y^2|$ la funzione definita su $\mathbf{R}^2$.

- i) Determinate le curve di livello $E_c = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = c\}$ di f per $c \in \{-1, 0, 1, 2\}$ e rappresentatele nel piano cartesiano.
- ii) Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di f su $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 0\}$ ed eventualmente i punti di minimo e di massimo.
- iii) Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di f su $\overline{B}_{1,d_1}(\mathbf{0})$ ed eventualmente i punti di minimo e di massimo.

3.11) a) Determinate l'insieme di definizione (e rappresentatelo graficamente) delle seguenti funzioni

$$f(x) = \log(1 - |x|), \quad g(x, y) = \log(1 - |x|), \quad h(x, y, z) = \log(1 - |x|).$$

- b) Sia $f(x, y) = e^{-x^2}$. Determinate $\inf_{\mathbf{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbf{R}^2} f$. Se T è il triangolo (chiuso) di vertici $(-1, -1)$, $(1, -1)$ e $(1, 1)$ determinate il massimo (i punti di massimo) e il minimo (i punti di minimo) di f su T .