

Esercizi Paradigma 4 - MOD2 : "Limiti e continuità per funzioni di più variabili (a valori reali/vettoriali)"
(15 - 19 marzo 2021)

4.1) Sia $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Provate, usando la definizione ε/δ (δ non necessariamente il migliore), la continuità nel punto (x_0, y_0) delle seguenti funzioni $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$:

i) $f(x, y) = x + y$; ii) $f(x, y) = xy$.

4.2) Provate, usando la definizione ε/δ (δ non necessariamente il migliore), la continuità nel punto $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$ delle seguenti funzioni $f : \mathbf{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$:

i) $f(x, y) = \frac{x}{y}$; ii) $f(x, y) = \frac{\sin x}{1+y}$.

4.3) Sia $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione in due variabili a valori vettoriali definita da $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x + y, x - y)$.

i) Dite se $\mathbf{f}$ è limitata, rispettivamente in $\mathbf{R}^2$ e nel rettangolo $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$.

ii) Calcolate $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \mathbf{f}(x, y)$.

4.4) Calcolate il seguente limite, verificando poi il risultato ottenuto mediante la definizione di limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(2y+1) + y^2}{x^2 + y^2}.$$

4.5) Per ciascuno dei seguenti limiti stabilite se esiste, e nel caso affermativo, calcolatene il valore:

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, -1)} (\cos(xy) + e^y)$; ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$; iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin y^3}{x^2 + y^2}$;

iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$; v) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^2}$; vi) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - xy}{4x^2 - y^2}$;

vii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$; viii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{2x^4 + y^4}$; ix) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$;

x) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; xi) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$; xii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2}$.

4.6) Per ciascuno dei seguenti limiti stabilite se esiste, e nel caso affermativo, calcolatene il valore:

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$; ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)}{x^2 + y^2} \sin(x+y)^2$; iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$.

4.7) i) Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

stabilite se f è continua nel punto $(0, 0)$.

ii) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq x \leq 1\}$ e sia $g : D \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$
Stabilite se g è continua nel punto $(0, 0)$.

4.8) Sia $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ e sia $\mathbf{l} \in \mathbf{R}^m$. Provate che se $\mathbf{l} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, allora $\|\mathbf{l}\| = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$. Verificate che l'implicazione inversa è vera se $\mathbf{l} = \mathbf{0}$.

È vera la seguente implicazione? Se esiste $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$, allora esiste $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

4.9) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$. È possibile estendere f con continuità in $(0,0)$?

4.10) Sia $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Dimostrate che se esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(\frac{y}{x})$, allora g è costante.

4.11) Sia f definita da $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$. Determinate l'insieme di definizione di f e rappresentate graficamente alcune curve di livello di f (può essere utile l'uso delle coordinate polari).

Stabilite se esiste il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

4.12) Verificate che la funzione $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + xy}$ è definita su tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

i) La funzione f è limitata?

ii) Esistono i seguenti limiti?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y); \quad \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y); \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} f(x, y),$$

nei casi in cui $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, 0 < y \leq x^2\}$ e $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, |y| \leq x^2\}$.

4.13) Per ciascuno dei seguenti limiti stabilite se esiste, e nel caso affermativo, calcolatene il valore:

$$\text{i) } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} \frac{\log x}{\log y}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < ax < 1, bx < y < ax\}, \quad 0 < b < 1 < a \text{ fissati};$$

$$\text{ii) } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} \frac{x}{x+y}, \quad A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < 1, \frac{\sqrt{y}}{2} < x < \sqrt{y}\}.$$

4.14) Determinate tutti i valori del parametro reale $\alpha > 0$ per i quali la funzione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = \frac{x^2|y|^\alpha}{x^4 + y^2}$ è estendibile con continuità a tutto $\mathbf{R}^2$.