

Esercizi Paradigma 5 - MOD2 : "Funzioni continue - Funzioni uniformemente continue ... e non solo"
(22 - 26 marzo 2021)

5.1) Stabilite se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ sono o non sono aperti, chiusi, limitati, connessi per poligoni:

- i) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : xyz = 0\}$; ii) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 < 1\}$;
iii) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 4x^2 + 16z^2 = 16\}$; iv) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 4x^2 + 16z^2 \geq 16\}$.

5.2) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ -1 & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

e $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) > 0\}$.

- i) L'insieme E è aperto? È chiuso?
ii) La funzione f è continua?

5.3) Sia $\alpha \in]0, 1[$. Una funzione $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ si dice *hölderiana di ordine α* in $]a, b[$ se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x, y \in]a, b[$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

Se $\alpha = 1$ la funzione f si dice anche *lipschitziana* (definizioni analoghe si ottengono per funzioni di più variabili a valori vettoriali).

- i) Provate che ogni funzione hölderiana di ordine α in $]a, b[$ è uniformemente continua in $]a, b[$.
ii) Provate che la funzione $\sqrt{x} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ è hölderiana di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ con $L = 1$. Deducete quindi che è uniformemente continua su $[0, +\infty[$.

5.4) Siano $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Sia f una funzione uniformemente continua sull'intervallo $]a, b[$ e sull'intervallo $[b, c[$. Provate che allora f è uniformemente continua su $]a, c[$.

5.5) *Cond. suff. per l'uniforme continuità su insiemi non compatti*

- i) Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Se f ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$, allora f è uniformemente continua su $[a, +\infty[$.
ii) Vale anche il viceversa?
iii) La funzione $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ è uniformemente continua su $[1, +\infty[$?

5.6) *Cond. suff. per l'uniforme continuità su insiemi non compatti*

Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$ esiste finito. Provate che f è uniformemente continua su $\mathbf{R}$.

5.7) *Cond. suff. per l'uniforme continuità su insiemi non compatti*

- i) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata limitata. Provate che f è uniformemente continua.
ii) Vale anche il viceversa?

5.8) La funzione $f :]0, 1[\rightarrow \mathbf{R}$ data da $f(x) = \log x$ è uniformemente continua su $]0, 1[$? E la funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$?

5.9) i) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$. Provate che i due limiti

$$(*) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

esistono e sono uguali, ma che non esiste

$$(**) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y).$$

- ii) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{y} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } y = 0. \end{cases}$

Provate che esiste il limite in $(**)$ ma non esistono i limiti in $(*)$.

5.10) Sia $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{|x|(1-x)}} \log(4 - x^2 - y^2)$. Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ il suo insieme di definizione. Dopo aver determinato il segno della funzione f in $(\frac{1}{2}, 0)$ e in $(-\frac{7}{4}, 0)$, dite se è applicabile il teorema di esistenza degli zeri.

5.11) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$. Provate che esiste in A una soluzione dell'equazione $-x^2 + \frac{\sin y}{1 + x^2 + y^2} = 0$.

5.12) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

i) Stabilite se f è continua in $\mathbf{R}^2$.

ii) Dite se f è uniformemente continua su $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq 2x \leq 1\}$.

5.13) *Cond. suff. per l'esistenza di un minimo su insiemi non compatti* (Teorema di Weierstrass generalizzato, vedi Es. 6.12, MOD1)

Sia $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ continua tale che

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty.$$

Allora f ammette minimo su $\mathbf{R}^n$, cioè esiste $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ tale che $f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})$.

5.14) Calcolate le derivate parziali prime, dove esistono, delle funzioni:

$$\frac{\arctan \frac{x}{y}}{x^2 + y^2}; \quad \log(1 + \cos(xy)); \quad \sqrt{x^2 + e^{3yx^2}}; \quad \int_0^{x^2+y^2} \frac{\sin t}{1 + e^t} dt.$$

5.15) Calcolate le derivate parziali prime, dove esistono, della funzione $f(x, y, z) = (x^2 z^2 + y^2) \log(z^2 y - x)$.

5.16) In quali punti di $\mathbf{R}^2$ le funzioni $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ e $g(x, y) = |xy|$ ammettono derivate parziali prime?