

Esercizi Paradigma 6 - MOD2 : "Derivate direzionali, derivate parziali, differenziabilità"
(05 - 09 aprile 2021)

- 6.1) Sia $C \subset \mathbf{R}^n$ un convesso chiuso. Sia $\hat{x} \in \mathbf{R}^n \setminus C$. Provate che $\mathbf{x}_0 \in C$ è la proiezione $P_C \hat{x}$ (proiezione di $\hat{x}$ su C o punto di C di minima distanza da $\hat{x}$ - vedi 10Lez. 25/03 pag.104) se e solo se

$$(*) \quad \langle \hat{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in C.$$

Ricordiamo che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$. Interpretate geometricamente la condizione (*). Provate che nel caso che C sia un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, la condizione (*) è equivalente a

$$\langle \hat{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in C.$$

- 6.2) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x+y}}{x^2+y^2}$. f è estendibile con continuità in $(0,0)$? Calcolate, se esiste, $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$.

- 6.3) Calcolate la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x,y) &= x^2 - xy; & \text{ii) } f(x,y) &= \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases} \\ \text{iii) } f(x,y) &= \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases} & \text{iv) } f(x,y) &= \frac{x}{1+x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Che cosa si può dire della continuità in $\mathbf{R}^2$ delle funzioni in i)-iv)?

- 6.4) Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x,y,z) = |x+y+z|$. Se $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ è tale che $x_0 + y_0 + z_0 = 0$, determinate le direzioni $\mathbf{v}$ in cui la derivata direzionale di f in $\mathbf{x}_0$ esiste.

- 6.5) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \sqrt{|xy|} \sin \sqrt{x^2+y^2}$.

i) Calcolate $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$.

ii) Calcolate, se esiste, $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x,y)$.

- 6.6) Calcolate le derivate parziali, dove esistono, delle funzioni:

$$\text{i) } f(x,y) = (x+y^2) \log(x-y); \quad \text{ii) } f(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

- 6.7) Calcolate il gradiente di f nel punto $\mathbf{p}$ indicato a fianco:

$$\text{i) } f(x,y) = \sin x \cos y \quad \mathbf{p} = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right); \quad \text{ii) } f(x,y,z) = \log \frac{xy}{z} \quad \mathbf{p} = (1, 1, 2).$$

- 6.8) Stabilite se la funzione f , definita nei casi di seguito elencati, è differenziabile nell'origine:

$$\text{i) } \sqrt{|xy|}; \quad \text{ii) } (y-x)\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{iii) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- 6.9) Calcolate la derivata direzionale (se il vettore dato non ha modulo unitario, va normalizzato):

- i) di $x^2 \log(x^2+y^2)$ nel punto $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ e nella direzione del vettore $\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$;
- ii) di $2x - 3\sqrt{2x^2+y}$ nel punto $(0,3)$ e nella direzione del vettore $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$;
- iii) di $x^2 - xz + xy^2$ nel punto $(-1, 2, 0)$ e nella direzione del vettore $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

- 6.10) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = |y| \sin(x^2 + y^2)$. Stabilite in quali punti di $\mathbf{R}^2$ la funzione f ammette le derivate parziali.
- 6.11) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = y^4 e^{3x}$. Determinate per quale versore $\mathbf{v}$, la derivata $D_{\mathbf{v}} f(0, -1)$ è massima e per quale è nulla.
- 6.12) Qual è la direzione $\mathbf{v} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ in cui è massima la rapidità di variazione della funzione $f(x, y) = x^2 + \sqrt{3}y^2$ nel punto $(1, 1)$?
- 6.13) Sia $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Verificate che il piano di equazione $z = 0$ non è il piano tangente al grafico della funzione f in $(\mathbf{0}, f(\mathbf{0}))$.
- 6.14) Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni:
 i) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^3 y^2}$ nel punto $(2, 1, f(2, 1))$; ii) $f(x, y) = \frac{\log(x^2 + y)}{y^2 - 3x}$ nel punto $(2, -3, f(2, -3))$.
- 6.15) Determinate i punti dei grafici delle seguenti funzioni in cui il piano tangente è orizzontale:
 i) $x^3 y^2 (6 - x - y)$; ii) $x^2 y e^{x+y}$.
- 6.16) Tracciate un grafico approssimativo delle seguenti funzioni (nei loro insiemi di definizione) e trovate le equazioni del piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:
 i) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$; ii) $f(x, y) = \sqrt{1 - 2x^2 - 4y^2}$.
- 6.17) Studiate, in funzione del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z^4 \frac{(x^2 + y^2)^\alpha}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, z) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, z). \end{cases}$$