

**Esercizi Paradigma 7 - MOD2 : “Differenziazione, piani tangenti, rette normali,...”**  
(12 - 16 aprile 2021)

7.1) Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiate, al variare di  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha > 0$ , la continuità, la derivabilità lungo ogni direzione  $\mathbf{v}$  e la differenziabilità della funzione  $f$  nell'origine.

7.2) Dite se sono differenziabili in  $\mathbf{R}^2$  le seguenti funzioni:

$$\text{i) } f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}; \quad \text{ii) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

7.3) Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^3 + y^3} & \text{se } x \neq -y \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Studiate la continuità di  $f$  in  $\mathbf{R}^2$ .  $f$  è limitata? Per  $n = 1, 2$  sia

$$Q_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{3n(n+1)}, |y| \leq \frac{1}{3n(n+1)}\}.$$

$f$  è uniformemente continua su  $Q_1 \cup Q_2$ ?

7.4) Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da  $f(x, y) = x + |y|$ .

- i) Rappresentate nel piano cartesiano  $xy$  alcune curve di livello della funzione  $f$ .
- ii) Studiate in  $\mathbf{R}^2$  la continuità, la derivabilità lungo ogni direzione  $\mathbf{v}$  e la differenziabilità di  $f$ .
- iii) Trovate il massimo e il minimo di  $f$  su  $\overline{B}_{1,d_1}(\mathbf{0})$ .

7.5) Si consideri la funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  che si annulla in  $(0, 0)$  e vale

$$f(x, y) = \sin(x + y^2) \log(x^2 + y^2)$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$ . La funzione  $f$  è continua? È differenziabile in  $(0, 0)$ ? Lungo quali direzioni  $\mathbf{v}$  esiste  $D_{\mathbf{v}}(0, 0)$ ?

7.6) Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Provate che  $f$  è differenziabile nel punto  $(0, 0)$ , ma non soddisfa in  $(0, 0)$  le ipotesi del teorema del differenziale totale (ossia,  $f \notin C^1(\mathbf{R}^2)$ ) - Ricordate che il teorema del differenziale totale dà condizioni *sufficienti*, ma non necessarie, per la differenziabilità di una funzione in un punto).

7.7) Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} e^{-\frac{y^2}{x^4}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Verificate che  $f$  nel punto  $(0, 0)$

i) è continua.

ii) è derivabile lungo ogni direzione  $\mathbf{v}$ .

iii) verifica la formula  $D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), \mathbf{v} \rangle$  per ogni versore  $\mathbf{v}$ .

iv) **non** è differenziabile.

(Ricordate che il teorema a pag. 128 (11Lez. 08/04; 12Lez. 13/04) esprime condizioni soltanto *necessarie*, ma non sufficienti, per la differenziabilità di una funzione in un punto)

7.8) Sia  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua in  $(0, 0)$  e tale che esistono  $M > 0$  e  $r > 0$  tali che

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M \quad \text{per ogni } (x, y) \in B_r(\mathbf{0}).$$

Supposto che  $f$  sia differenziabile su  $B_r(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ , provate che  $f$  è lipschitziana in  $(0, 0)$ .

7.9) Sia  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua e dispari. Sia  $f(x, y) = \int_x^y g(t) dt$  per  $x, y \in \mathbf{R}$ .

i) Provate che per ogni  $x \in \mathbf{R}$  si ha  $f(x, -x) = f(-x, x)$  e  $f(x, -x) = 0$ .

ii) Provate che per ogni  $x_0 \in \mathbf{R}$ , il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, -x_0, f(-x_0, x_0))$  passa per l'origine.

7.10) Determinate i punti del grafico della funzione  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  in cui il piano tangente è normale a  $(1, 2, 1)$ .

7.11) Determinate i punti del grafico della funzione  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  in cui il piano tangente è ortogonale alla retta di equazioni

$$x = \frac{1}{2}t, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad z = \frac{1}{2}t.$$

7.12) Sia  $\alpha \in \mathbf{R}$  e  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione definita da  $f(x, y) = \sin(\alpha x + y^2)$ .

i) Determinate per quale valore di  $\alpha \in \mathbf{R}$  il piano tangente al grafico di  $f$  nel punto  $(0, \sqrt{\pi}, 0)$  è parallelo alla retta  $x = y = 2z$ .

ii) Esistono valori di  $\alpha$  per cui è perpendicolare?

7.13) i) Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico della funzione  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

ii) Determinate in quali punti il piano tangente è ortogonale al vettore  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ .

iii) Determinate in quali punti il piano tangente è parallelo alla retta  $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0. \end{cases}$