

Esercizi Paradigma 8 - MOD2 : “Derivate di ordine superiore e non solo, funzioni positivamente omogenee e il teorema di Eulero, funzioni armoniche...”

(19 - 23 aprile 2021)

8.1) Determinate la derivata rispetto a $t \in \mathbf{R}$ (se non specificato altrimenti) delle funzioni composte $(g \circ f)(t)$ seguenti:

- i) $g(x, y) = x^2 - y^2$, $f(t) = (2 + t, 1 - 3t)$;
- ii) $g(x, y) = (x^2 + y^2)^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$;
- iii) $g(x, y) = \log(x^2 - y^2)$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ con $0 < t < \frac{\pi}{4}$;
- iv) $g(x, y, z) = z^2x + xy^2$, $f(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$.

8.2) Un insieme $A \subseteq \mathbf{R}^n$ si dice un *cono* (oppure un insieme *conico*) se per ogni $\mathbf{x} \in A$ e per ogni $t > 0$ si ha $t\mathbf{x} \in A$ (cioè A è un cono se contenendo un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ contiene tutta la semiretta uscente dall'origine $\mathbf{0}$ (non compreso) passante per $\mathbf{x}$).

Dite quali dei seguenti insiemi sono coni e quali no:

- i) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 1\}$;
- ii) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq |y| \leq 2|x|\}$;
- iii) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy > 0\}$;
- iv) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |z| \geq \sqrt{4x^2 + 9y^2}\}$.

8.3) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un cono e sia $\alpha \in \mathbf{R}$. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *positivamente omogenea di grado α* se

$$(*) \quad f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A, \quad \forall t > 0.$$

Stabilite se le seguenti funzioni sono funzioni positivamente omogenee determinandone il grado di omogeneità.

- i) $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ su $A = \mathbf{R}^2$;
- ii) $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ su $A = \mathbf{R}^n$;
- iii) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ su $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$;
- iv) $f(x, y) = x^2 + y$ su $A = \mathbf{R}^2$;
- v) $f(x, y, z) = \frac{x - y + 3z}{yz - z^2}$ su $A = \mathbf{R}^3 \setminus \{z = 0\} \cup \{z = y\}$.

8.4) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un cono e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione positivamente omogenea di grado α .

- i) Provate che se $\mathbf{0} \in A$ e $\alpha \neq 0$, allora $f(\mathbf{0}) = 0$.
- ii) Per ogni $\mathbf{x} \in A \cap \partial B_1(\mathbf{0})$ sia $f(\mathbf{x}) = 4$. Siano $\mathbf{x}_1 = (1, 1, \dots, 1, 1)$ e $\mathbf{x}_2 = (-2, 2, -2, \dots, (-1)^n 2)$ in $\mathbf{R}^n$. Se $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ appartengono ad A , calcolate $f(\mathbf{x}_1)$ e $f(\mathbf{x}_2)$; più in generale, scrivete l'espressione di $f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{0}\}$ (se A contiene l'origine).

8.5) (**Teorema di Eulero**) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un cono aperto, e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in A . Allora f è positivamente omogenea di grado α se e solo se vale

$$(**) \quad \langle \mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A, \quad (\text{identità di Eulero}).$$

(Suggerimento dim.: ($\implies$) usate (*) in 8.3) e il teorema di derivazione di funzioni composte.

($\impliedby$) Fissato $\mathbf{x} \in A$, provate che la funzione $g(t) = \frac{f(t\mathbf{x})}{t^\alpha}$ definita per $t \in]0, +\infty[$ è costante (usando di nuovo il teorema di derivazione di funzioni composte).

8.6) (**Omogeneità del gradiente di una funzione omogenea**) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^n$ un cono aperto, e $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile in A . Provate che se f è positivamente omogenea di grado α allora per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ la derivata parziale f_{x_i} è una funzione omogenea di grado $\alpha - 1$ su A .

8.7) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione $f(x, y) = x^3 y \cos \frac{xy}{x^2 + y^2}$ e sia $g : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbf{R}\} \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione $g(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$. Le funzioni f e g sono positivamente omogenee? In caso affermativo, verificate la validità dell'identità di Eulero (**).

8.8) Sia $\mathbf{A}$ una matrice reale e simmetrica $n \times n$ e $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ (*forma quadratica* associata alla matrice $\mathbf{A}$). Verificate che f verifica l'identità di Eulero (***) con $\alpha = 2$ (vedi 11Lez. 08/04 pag.122).

8.9) (*Peano 1884*) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

i) Osservate che per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$ le derivate seconde miste esistono $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ e sono uguali.

ii) Dimostrate che $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ e che le derivate prime sono continue.

iii) Determinate le derivate parziali seconde miste di f in $(0, 0)$ e verificate che $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

8.10) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un insieme aperto e $u \in \mathcal{C}^2(A)$. La funzione u si dice *armonica* se

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{in } A,$$

$$\text{dove } \Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y).$$

Verificate che le seguenti funzioni sono armoniche nel loro insieme di definizione $A \subseteq \mathbf{R}^2$:

$$\text{i) } y^3 - 3x^2y; \quad \text{ii) } \arctan \frac{y}{x}; \quad \text{iii) } \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

8.11) Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$. Sia $c > 0$ e sia $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$\varphi(x, t) = f(x + ct) \quad (\text{oppure da } \varphi(x, t) = f(x - ct)).$$

Verificate che la funzione φ soddisfa l'equazione alle derivate parziali (*equazione delle onde*)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{in } \mathbf{R}^2.$$

8.12) Verificate che la funzione $f :]0, +\infty[\times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali (*equazione del calore*)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{in }]0, +\infty[\times \mathbf{R}.$$