

Esercizi Paradigma 9 - MOD2 : “Formula di Taylor ed estremi liberi (i primi passi)...”
(26 - 30 aprile 2021)

- 9.1) i) Sia $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e sia $r : A \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ ($=\sqrt{x^2 + y^2}$ per ogni $\mathbf{x} = (x, y) \in A$). Determinate per ogni $\mathbf{x} \in A$

$$\Delta r(\mathbf{x}); \quad \Delta(r^2)(\mathbf{x}); \quad \Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\mathbf{x}).$$

- ii) Sia $n > 2$. Sia $A = \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ e sia $r : A \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $r(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ ($=\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$). Determinate per ogni $\mathbf{x} \in A$

$$\Delta r(\mathbf{x}); \quad \Delta(r^2)(\mathbf{x}); \quad \Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\mathbf{x}).$$

Oss. Per $n = 3$, confrontate $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)(\mathbf{x})$ con quanto ottenuto nell'es. a pag. 161 (15Lez. 22/04).

- 9.2) Provate che per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ valgono

i) $(x + y)^3 + xy^2 + o(xy) = o(\|\mathbf{x}\|^2);$

ii) $yx^4 + xo(y^3) = o(\|\mathbf{x}\|^4).$

- 9.3) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $\mathbf{x}_0$ delle funzioni

i) $f(x, y) = x \cos(x + y)$ con $\mathbf{x}_0 = (0, 0);$

ii) $g(x, y) = \log(2x^2 + y)$ con $\mathbf{x}_0 = (1, 0).$

- 9.4) Scrivete (motivando) il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ delle funzioni

i) $x^2 - 2y + x^4 - y^4;$ ii) $x^2 - 2y + \sin^2(x^2 + y^2);$ iii) $x^2 - 2y + \arctan x^4.$

- 9.5) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$ delle funzioni

i) $f(x, y, z) = 2x - yz + z^3 + 3x^4 - y^2z^2;$ ii) $g(x, y, z) = e^x e^y e^z.$

- 9.6) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ delle funzioni

i) $f(x, y) = \log(1 + x \sin y);$ ii) $g(x, y) = (1 - \cos x) \sin y;$

iii) $f(x, y, z) = \sin(2x + y - z);$ iv) $g(x, y, z) = (x + y) \sin z + (x + z) \sin y + (y + z) \sin x.$

- 9.7) Calcolate $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x - 1 + e^y) - x - y}{x^2 + |y|}.$

- 9.8) Delle seguenti funzioni determinate il differenziale primo e il differenziale secondo nel punto $\mathbf{x}_0$ a fianco indicato:

i) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}$ $\mathbf{x}_0 = (1, 0);$ ii) $f(x, y, z) = e^{2x+y} + \cos(3x + z)$ $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0).$

- 9.9) a) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = xy - 2x + y - 2$. Rappresentate graficamente alcune curve di livello di f , determinate i punti critici di f e studiate la loro natura.

b) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = xy(x - 1)$. Studiate il segno di f . Determinate se esiste $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y)$ e dite se esistono massimo e minimo globale per f . Determinate i punti critici della f e studiate la loro natura.

c) Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$. Determinate il suo segno. Determinate i punti critici della f e studiate la loro natura.

9.10) Classificate le seguenti forme quadratiche $Q(\mathbf{h}) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ($Q(\mathbf{h}) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$) definite da

i) $Q(h_1, h_2) = h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2$;

ii) $Q(h_1, h_2) = 2h_1^2 - 3h_1h_2 + h_2^2$;

iii) $Q(h_1, h_2) = -h_1^2 + h_1h_2 - h_2^2$;

iv) $Q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + h_2^2 + h_1h_3 + 3h_1h_2 - 6h_2h_3$;

v) $Q(h_1, h_2, h_3) = -h_1^2 - 2h_2^2 + 2h_1h_2 - \frac{1}{2}h_3^2$.