Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2020–2021

Esercizi paradigma 13 : "...serie e integrali impropri ... l'eleganza e i misteri della funzione integrale ..."
(7 - 11 dicembre 2020)

13.1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^4} & \text{se } x \leq 1 \\ -e^{-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

i) Determinate il punto di massimo $\overline{x} \in]0, +\infty[$ per F.

ii) Provate che F non è derivabile in $\overline{x}$.

iii) Studiate la concavità/convessità di F.

iv) Provate che $F(x)$ ha asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

v) Tracciate un grafico qualitativo di F.

13.2) Sia data la funzione

$$F(x) = \int_1^x (t^2 - 1)e^{2t^2} dt.$$

a) Determinate il dominio di F, studiate la sua monotonia e la sua concavità/convessità.

b) Dopo aver provato che F non ha né asintoti orizzontali, né asintoti obliqui per $x \to -\infty$ (analog. per $x \to +\infty$), tracciate un grafico qualitativo di F.

13.3) Studiate la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{\sqrt{|t-2|}} dt$$

determinando il dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio e la monotonia. Tracciate poi un grafico qualitativo di F.

13.4) Studiate la funzione

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{2+t^4} dt$$

determinando il dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio e la monotonia; tracciatene un grafico qualitativo.

13.5) Calcolate

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin x + \arctan x}{x^2} dx;$ ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin x - \arctan x}{x^4} dx.$

13.6) i) Provate che $e^x > 1 + (1+x)\log(1+x)$ per ogni $x > 0$.

ii) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x - \sin x + x^\alpha}{e^x - 1 - (1+x)\log(1+x)} dx.$$

13.7) Provate che l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ è convergente.

13.8) Calcolate i seguenti limiti:

i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$ ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k}$ iii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=3^n}^{4^n}\frac{1}{k}.$