

Esercizi paradigma 2: “Principio d’induzione, estremo sup/inf e un po’ di numeri reali”
(21 - 25 settembre 2020)

- 2.1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \arctan(|x|) & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$
- i) Determinate l’immagine tramite f degli intervalli $[-1, 2]$ e $]-\infty, -1[$.
 - ii) Determinate la controimmagine tramite f degli insiemi $\{-1\}$, $\{\frac{\pi}{4}, 4\}$ e \mathbb{R} .
- 2.2) Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 6 \arcsin(\frac{x}{2}) + \pi$, dove D è l’insieme di definizione di f .
- i) Determinate D e l’immagine $f(D)$ di f .
 - ii) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di f e della sua inversa $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$.
 - iii) Scrivete l’espressione analitica di f^{-1} .
 - iv) Determinate la controimmagine tramite f degli insiemi $\{\frac{5\pi}{2}\}$, $[2\pi, 3\pi[$ e $[-\pi, +\infty[$.
- 2.3) Provate, usando il principio di induzione, che
- i) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$;
 - ii) $n^2 \geq 2n+1$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$;
 - iii) $2^n \geq n^2$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$;
 - iv) $n! \geq 3^{n-2}$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 2.4) Provate, usando il principio di induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti relazioni:
- i) $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
 - ii) $3^n \geq n2^n$.
- 2.5) Per ciascuna delle seguenti disuguaglianze determinate per quali interi positivi n la disuguaglianza è vera:
- i) $3^n + 4^n \leq 5^n$;
 - ii) $n^n \geq 2^n n!$.
- 2.6) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{2} - \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- a) L’insieme A ha minimo.
 - b) Il numero $\sqrt{2} + 1$ è l’estremo superiore di A e non è il massimo di A .
 - c) Si ha $\inf A = \sqrt{2}$.
 - d) L’insieme A non è limitato.
- 2.7) a) Rappresentate sulla retta reale gli insiemi
- $$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{4x+x^2}{x-1} \geq x\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-5x+6}{x^2} > 0\};$$
- $$C = \{x \in \mathbb{R} : |(x^2-4)(x^2-1)| \leq 0\}; \quad D = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+5x}{x-1} \leq 1-x\};$$
- $$E = \{x \in \mathbb{R} : -x^2+x \leq x\}; \quad F = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|-1}{x^2+2x-3} \geq 0\}.$$
- b) Di ogni insieme determinato nel punto a)
 - i) dite se è limitato (inferiormente/superiormente);
 - ii) individuate l’insieme dei suoi maggioranti e l’insieme dei suoi minoranti;
 - iii) determinate il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore e dite se sono massimo e minimo, rispettivamente.

- 2.8) Siano dati due insiemi non vuoti E ed F , con $F \subset E \subset \mathbb{R}$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilite se è vera o falsa. Nel caso sia falsa, fornite un controesempio.
- Se F è limitato inferiormente, allora lo è anche E .
 - Se esiste $\min F$, allora esiste $\min E$.
 - Se E è limitato superiormente, allora $\sup F$ è un numero reale.
 - Si ha $E \times F \subseteq E \times E$.

- 2.9) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente. Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore. Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad A &= \{x_n = \frac{3n-2}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}; & \text{ii)} \quad A &= \{x_n = n^2 - 2n - 3, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}; \\ \text{iii)} \quad A &= \{x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}; & \text{iv)} \quad A &= \{x \in \mathbb{R} : -6x^2 - |x| + 1 > 0\}. \end{aligned}$$

2.10) Sia $A = \{x_n = \frac{3n-1}{n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$.

- Provate che si ha $0 < x_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
- Provate che si ha $\inf A = 0$ e $\sup A = 2$.
- Dite se sono minimo e massimo, rispettivamente.

- 2.11) a) Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{x_n = \frac{(-1)^n + 2}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente (motivate le risposte!).

b) Determinate l'insieme A definito da $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1\}$.

Determinate $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$. Dite se A è un intervallo e se A è limitato.

- 2.12) Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\sup E = 1$. Per ciascuna delle seguenti proposizioni dite se la proposizione è necessariamente vera:

- $\forall x \in E, x > 0.9$;
- $\forall x \in E, x < 1$;
- $\exists x \in E : x > 0.9$;
- $\exists x \in E : x < 1$.

- 2.13) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Trovate tutte le coppie $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ di affermazioni, dove \mathcal{P} è un'affermazione della prima colonna e \mathcal{Q} è un'affermazione della seconda, tali che \mathcal{P} implichi \mathcal{Q} .

- | | |
|---|------------------------------------|
| i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in A : y \geq x$ | a) A è limitato inferiormente. |
| ii) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in A : y \geq x$ | b) Si ha $\sup A = +\infty$. |
| iii) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in A, y \geq x$ | c) A ammette minimo. |
| iv) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in A, y \geq x$ | d) A è limitato superiormente. |
| v) $\exists x \in A : \forall y \in A, y \geq x$ | e) A è illimitato superiormente. |
| vi) $\forall x \in A, \exists y \in A : y \geq x + 1$ | f) Si ha $\inf A = -\infty$. |
| vii) $\forall x \in A, \exists y \in A : y > x$ | g) A non ammette massimo. |

- 2.14) Dimostrate che per ogni $x, y, a \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\text{i)} \quad |x+y| \leq |x| + |y|; \quad \text{ii)} \quad |x-y| \leq |x-a| + |y-a|; \quad \text{iii)} \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

- 2.15) Dimostrate che per ogni $x, y, \varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$ valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\text{i)} \quad xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2; \quad \text{ii)} \quad xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{4\varepsilon}y^2; \quad \text{iii)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

- 2.16) Siano $a, b, C \in \mathbb{R}_{>0}$ tali che

$$a^2 \leq C(a+b).$$

Allora

- $a^2 \leq 2Cb + C^2$;
- $a \leq b + C$.