Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2020–2021

Esercizi paradigma 4: "Proprietà globali di funzioni reali di variabile reale... e i primi passi con i limiti"
(5 - 9 ottobre 2020)

4.1) i) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di
a) maggiorante di f b) estremo superiore di f c) massimo di f .
ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x^3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -2^{-x} & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando la rappresentazione grafica di f ,
a) determinate l'insieme dei maggioranti di f e l'insieme dei minoranti di f .
b) determinate $\inf_{\mathbb{R}} f$ e $\sup_{\mathbb{R}} f$. Essi sono massimo e minimo, rispettivamente?

4.2) Trovate una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia
i) strettamente crescente e non suriettiva;
ii) iniettiva e non monotona.

4.3) i) Provate che la successione di termine $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ è strettamente crescente (ossia, per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ si ha $a_n < a_{n+1}$).
ii) Le successioni di termini $b_n = \log(a_n + 1)$ e $c_n = -\sqrt[3]{a_n}$ sono strettamente crescenti?

4.4) Dimostrate che la funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ è strettamente decrescente su ciascuno degli intervalli
i) $]-\infty, -2[$; ii) $]-2, 2[$; iii) $]2, +\infty[$.

4.5) Siano $f, g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definite da $f(x) = [x^2]$ e $g(x) = x^2 - f(x)$.
i) Rappresentate il grafico di f e quello di g.
ii) Determinate il massimo intervallo $A \subseteq [-2, 2]$ contenente $\frac{1}{2}$ e tale che $f|_A$ risulti crescente.
iii) Determinate il massimo intervallo $B \subseteq [-2, 2]$ contenente $\frac{1}{2}$ e tale che $g|_B$ risulti crescente.
iv) Determinate l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su $[-2, 2]$ e quelli di g su $[-2, 2]$.
v) Individuate i punti di massimo e i punti di minimo sia di f sia di g.

4.6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Determinate quali delle seguenti implicazioni sono vere?
i) Se f e g sono pari, allora il loro prodotto è una funzione pari.
ii) Se f e g sono periodiche, allora il loro prodotto è una funzione periodica.
iii) Se f e g sono monotone, allora il prodotto è una funzione monotona.
iv) Se f e g non sono limitate, allora il loro prodotto è una funzione non limitata.

4.7) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni. Determinate quali delle seguenti implicazioni sono vere?
i) Se f e g sono dispari, allora $f \circ g$ è una funzione dispari.
ii) Se f e g sono periodiche, allora $f \circ g$ è una funzione periodica.
iii) Se f e g sono monotone, allora $f \circ g$ è una funzione monotona.
iv) Se f e g non sono limitate, allora $f \circ g$ è una funzione non limitata.

4.8) Scrivete, in matematichese (usando $\forall \varepsilon > 0, \ldots$ oppure $\forall M > 0, \ldots$), la definizione di

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2\,; \qquad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 1\,; \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty\,.$$

4.9) Provate, usando la definizione di limite, che $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x+1} = 3$.

4.10) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to3}(x^2 - 3x + 1)$; $\lim_{x\to-1}(\frac{1}{x^3} + 2\sqrt[3]{x})$; $\lim_{x\to\pi}(\frac{x^2 + \sin x}{\sqrt[4]{x}})$;

ii) $\lim_{x\to-2^-} \frac{1}{x^2 - 4}$; $\lim_{x\to-1^+} \frac{2^{-1}}{x^3 + 1}$; $\lim_{x\to1^-} \frac{\sin 1}{|x| - 1}$; $\lim_{x\to1^+} \frac{\sin 1}{|x| - 1}$;

iii) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{x^2} + \frac{3x}{x^2+1})$; $\lim_{x\to1^+} \frac{x^2 - x - 3}{1 - x^4}$; $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x})$.

4.11) Calcolate i seguenti limiti di funzioni razionali:

a) $\lim_{x\to3} \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - x - 3}$; b) $\lim_{x\to0} \frac{12x^2 - 2}{\frac{1}{5x}}$; c) $\lim_{x\to-1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$; d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + x + 5}{(x-2)^2}$;

e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^5 - 1}{x^2 - 1}$; f) $\lim_{x\to2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - x - 2}$; g) $\lim_{x\to0^+} \frac{x^4 + 2x^2}{x^7}$; h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 - \frac{1}{2x^3}}{2x^4 + 5}$.

4.12) Calcolate i seguenti limiti di funzioni irrazionali:

a) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$; b) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})$; c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x+2}}\sqrt{x^2 + x + 1}$; d) $\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x+16} - 4}{|x|}$;

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}$; f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x - 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1}}$; g) $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$.

4.13) Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni a termini reali positivi. Provate con esempi che

a) $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$ non implica $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$;

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ non implica $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

4.14) Trovate due successioni $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ a valori reali tali che

i) $a_n \to 0$, $b_n \to +\infty$ e la successione $(a_n b_n)_n$ abbia limite finito (analogamente, abbia limite $+\infty$, oppure $-\infty$, oppure non abbia limite);

ii) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ e la successione $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ abbia limite finito (analogamente, abbia limite $+\infty$, oppure $-\infty$, oppure non abbia limite).