**Università di Trento - Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e in Ingegneria Ambientale - 2015/16**

# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 1 foglio di esercizi - 26 febbraio 2016

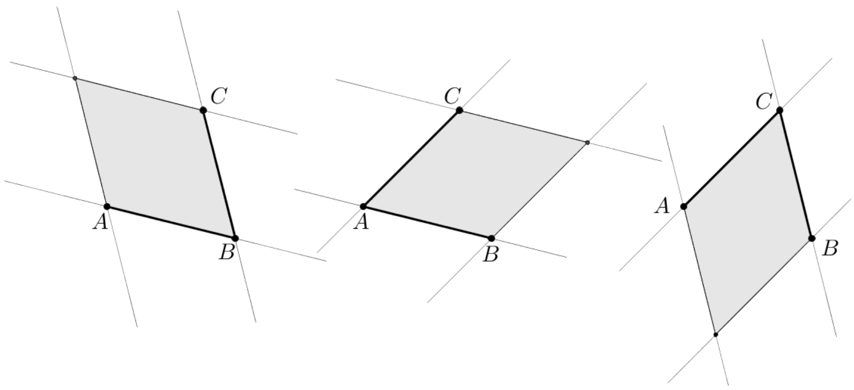
**Vettori nel piano e nello spazio. Rappresentazione e costruzioni grafiche.**

### 1.1 Esercizio parallelogrammi

Dati tre punti $A, B, C$ non allineati, si costruiscano i parallelogrammi per i quali $A, B, C$ sono tre dei quattro vertici (ci sono tre possibilità). Si faccia la costruzione grafica in modo qualitativo e poi con riga e compasso, motivando la risposta.

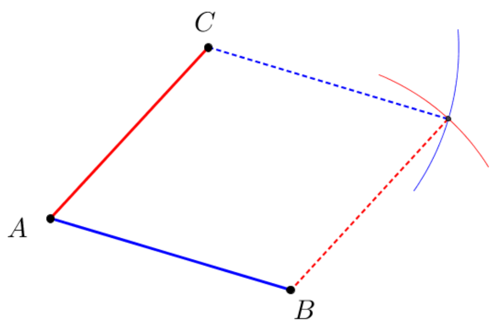
#### Soluzione

Nelle figure sotto si vedono i tre parallelogrammi che si possono costruire con i tre vertici assegnati.




Nella figura a fianco è rappresentata la costruzione del parallelogramma con riga e compasso:

- con il compasso si prende il segmento $AB$ e si traccia il cerchio di centro $C$ e raggio $AB$; nella figura si vede un arco di questo cerchio, che è in colore blu sullo schermo;
- con il compasso si prende poi il segmento $AC$ e si traccia il cerchio di centro $C$ e raggio $AC$; nella figura si vede un arco di questo cerchio, che è in colore rosso sullo schermo;
- si traccia il punto $P$ in cui i due cerchi si intersecano.

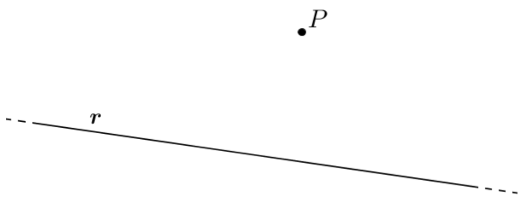



A questo punto si considera il quadrilatero $ABPC$ e si vede che è un parallelogramma poiché:
a) per costruzione, ha i lati opposti uguali;
b) se un quadrilatero ha i lati opposti uguali, allora i lati opposti sono paralleli.
Si lascia al lettore interessato la dimostrazione che l'affermazione b) segue dagli assiomi di Euclide.

La figura qui sopra è realizzata con il software libero Geogebra e il file .ggb della costruzione si può trovare all'indirizzo `http://ggbtu.be/mXDr3Oyef`. Con il file si può operare on-line. Si suggerisce di scaricare e installare il software Geogebra, che è di uso molto semplice e può essere utile per esplorare alcuni tipi di problemi.

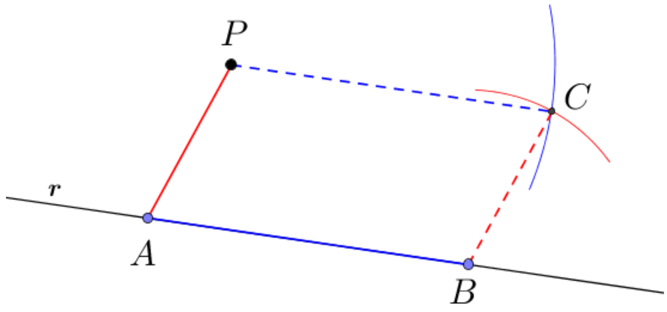
## 1.2 Esercizio **retta parallela a una retta data per un punto assegnato**

Siano dati una retta $r$ e un punto $P$ che non appartiene ad $r$. Ricordiamo che (è un assioma) esiste una e una sola retta $s$ passante per $P$ e parallela a $r$. Si stampi la figura o la si riproduca su un foglio e si costruisca la retta $s$ con riga e compasso, motivando la risposta.



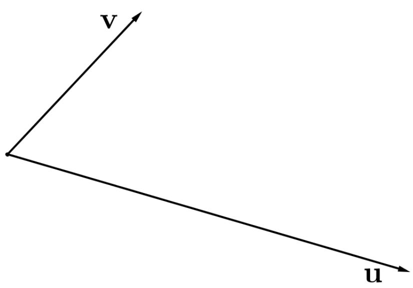

**Soluzione**

É sufficiente costruire un parallelogramma $ABCP$ che ha i vertici $A, C$ vertici sulla retta $r$. A questo fine, scegliamo $A$ e $C$ arbitrariamente su $r$. Poi con il compasso prendiamo il segmento $AP$ e lo riportiamo con centro in $B$, tracciando un arco di cerchio (rosso in figura). Inoltre, con il compasso prendiamo il segmento $AB$ e lo riportiamo con centro in $P$, tracciando un arco di cerchio (blu in figura). I due cerchi si intersecano in un punto $C$ e per costruzione il quadrilatero $ABCP$ ha i lati opposti uguali, quindi è un parallelogramma. La retta per $P$ e $C$ è quindi la retta parallela a $r$ e passante per $P$ che era richiesta.
Il file della costruzione si trova qui:
`http://ggbtu.be/mYGUpTJMa`



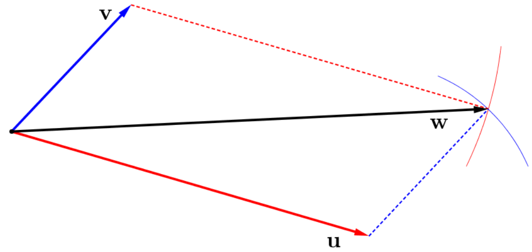

## 1.3 Esercizio **somma di vettori**

Si stampi la figura o la si riproduca su un foglio e si costruisca graficamente il vettore **w** somma dei vettori **u**, **v**. Si faccia la costruzione grafica in modo qualitativo e poi con riga e compasso, motivando la risposta.



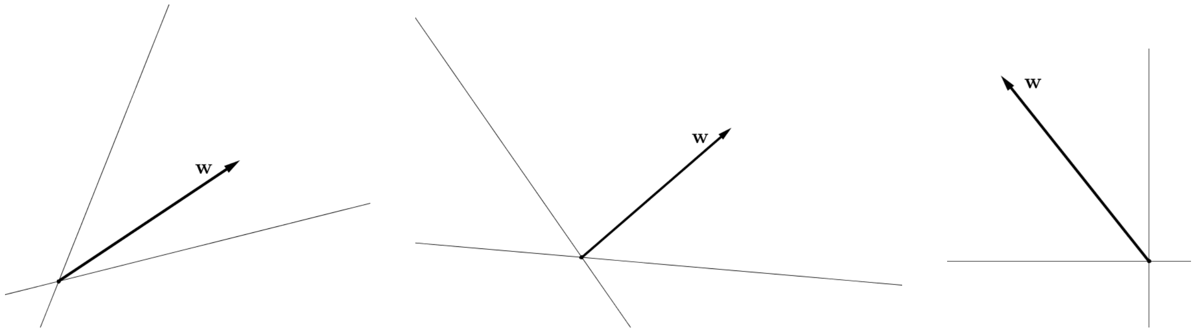

**Soluzione**

Il vettore somma **w** è la diagonale del parallelogramma che ha lati **u** e **v**. Per costruire il parallelogramma si può usare lo stesso metodo utilizzato nell'esercizio 2.1.
Il file della costruzione si trova qui:
`http://ggbtu.be/mUp0gNZud`



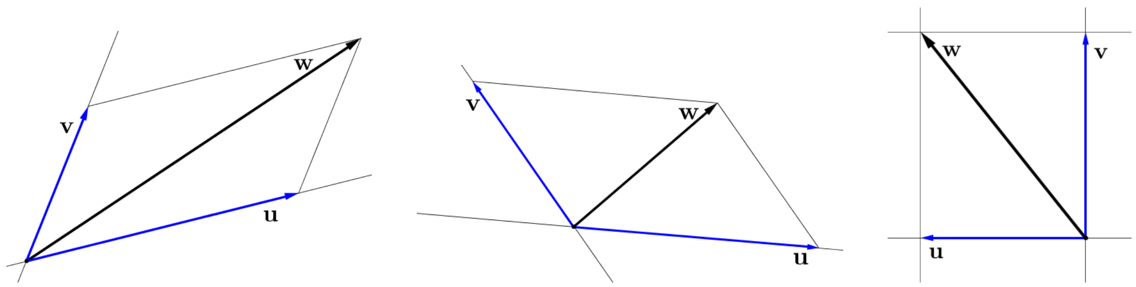
## 1.4 Esercizio **decomposizione di un vettore rispetto a due direzioni date**

Si stampino o si riproducano su un foglio le figure e per ciascuna di esse si costruiscano graficamente due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nelle direzioni delle rette indicate, la cui somma sia il vettore $\mathbf{w}$. I vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ si dicono *componenti* del vettore $\mathbf{w}$ , e si dice che $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ è una decomposizione di $\mathbf{w}$ rispetto alle direzioni delle rette indicate.




**Soluzione**

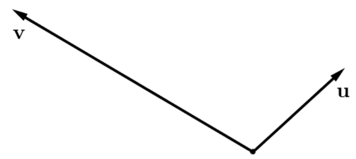
Per decomporre graficamente il vettore $\mathbf{w}$ rispetto a due rette date, si tracciano le rette che sono parallele alle direzioni date e passano per il punto di arrivo del vettore $\mathbf{w}$. Queste due nuove rette incontrano le rette date nei punti che determinano le componenti. La situazione è illustrata nelle figure sotto.



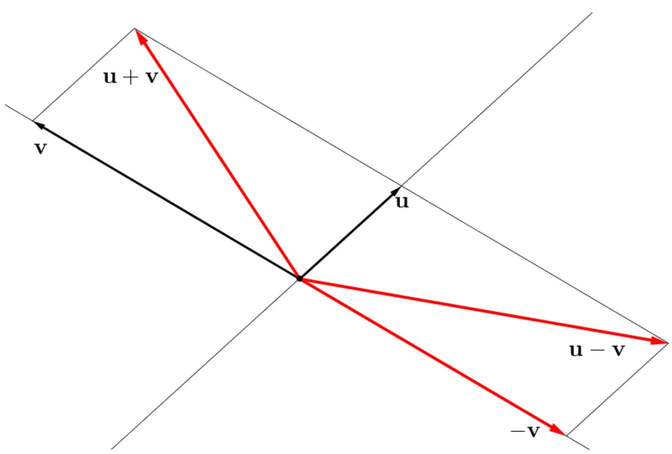

## 1.5 Esercizio **vettore opposto, differenza di vettori**

Si stampi la figura o la si riproduca su un foglio e si costruiscano graficamente i vettori

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \qquad -\mathbf{v} \qquad \mathbf{u} - \mathbf{v}$$




**Soluzione**



## 1.6 Esercizio **proprietà associativa della somma di vettori**

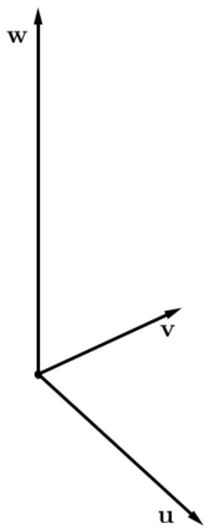
Si stampi la figura o la si riproduca su un foglio e si costruiscano graficamente i vettori

$\mathbf{u}+\mathbf{v}$,

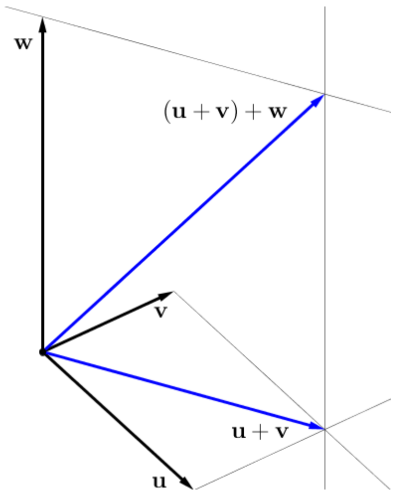
$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$,

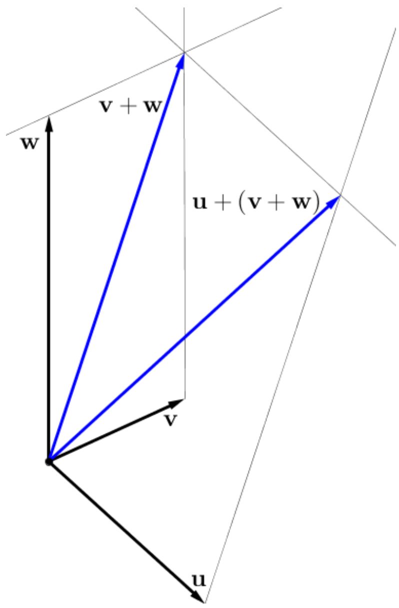
$\mathbf{v}+\mathbf{w}$,

$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.




**Soluzione**




## 1.7 Esercizio **punto di Steiner**

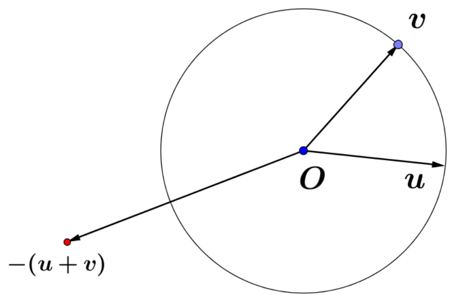
Si disegnino tre vettori della stessa lunghezza, la cui somma sia il vettore 0, motivando la risposta.

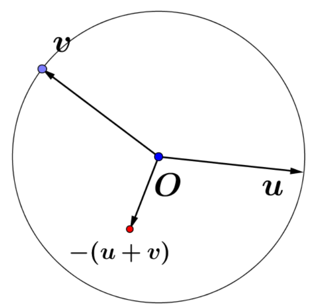
**Soluzione**

Chiamiamo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$ i vettori cercati. Si chiede che $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=0$ ossia che

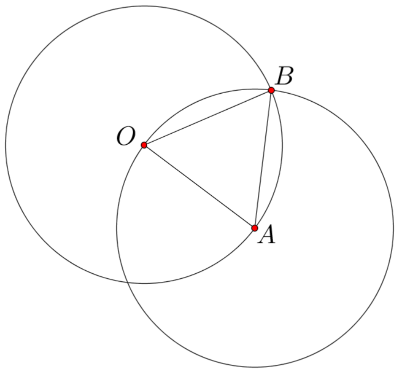
$$\mathbf{w}=-(\mathbf{u}+\mathbf{v})$$

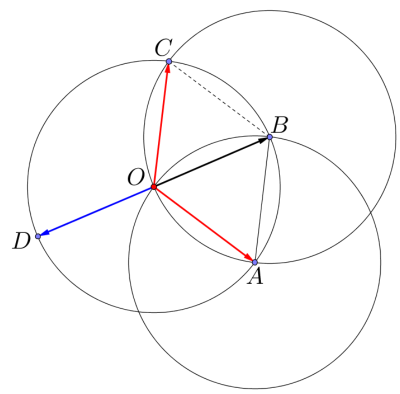
Rappresentiamo i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, che devono avere la stessa lunghezza, come raggi di una circonferenza, come nelle figure sotto. Si vede che il vettore $\mathbf{w}=-(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ non ha in generale la stessa lunghezza dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$: ha lunghezza maggiore se l'angolo fra questi due è piccolo, e ha lunghezza minore se l'angolo è grande.



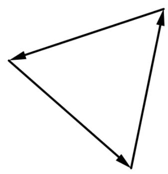




Nel file interattivo che si trova qui `http://ggbtu.be/m2812089` si può modificare a piacere la posizione del vettore **v** e si comprende che la lunghezza di **w** è uguale a quella degli altri due vettori se l'angolo ha un certo valore, che si intuisce essere un terzo dell'angolo giro. Facciamo allora una costruzione rigorosa che mostri la correttezza della nostra intuizione. Cominciamo a costruire un triangolo equilatero nella figura sotto a sinistra: si parte da una circonferenza di centro $O$ e poi si traccia una seconda circonferenza, che ha lo stesso raggio e centro in un un punto $A$ che appartiene alla prima circonferenza; il punto $B$ di intersezione tra le due circonferenze è equidistante da $O$ e da $A$ e il triangolo $OAB$ è equilatero. In particolare ne segue che l'angolo $A\hat{O}B$ è di $60°$. Ripetiamo la costruzione nella figura a destra: si traccia anche la circonferenza di centro $B$ e raggio uguale alle precedenti. Il triangolo $OBC$ risulta quindi equilatero e l'angolo $A\hat{O}C$ è di $120°$. Si mostra facilmente che il quadrilatero $ABC$ è un parallelogramma e $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. I tre vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$, $-\overrightarrow{OB}$ rispondono a quanto chiesto dall esercizio.




A questo indirizzo `http://ggbtu.be/mSYBLvjtW` si trova il file della costruzione qui sopra a sinistra, da cui lo studente è invitato a partire per realizzare la costruzione sopra a destra.

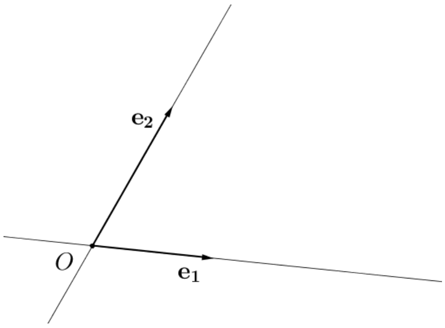


La somma dei tre vettori trovati si può interpretare geometricamente anche con la figura qui a fianco, nella quale i vettori sono rappresentati come i lati di un triangolo equilatero. Una interpretazione fisica è invece che tre forze di uguale intensità disposte su un piano, che sono in equilibrio, devono essere orientate in direzioni a $120°$ l'una dall'altra. Infine una conseguenza geometrica è che, se per un certo punto $O$ è minima la somma della distanze da tre punti dati (si dice che $O$ è il punto di Steiner dei tre punti dati), allora i segmenti che congiungono $O$ ai punti sono a $120°$; la dimostrazione di questo richiede però qualche ragionamento ulteriore. Per altri esempi fisici e geometrici correlati si veda ad esempio `http://www.science.unitn.it/~lrm3d2/SITOBOLLE/attivita.htm`.

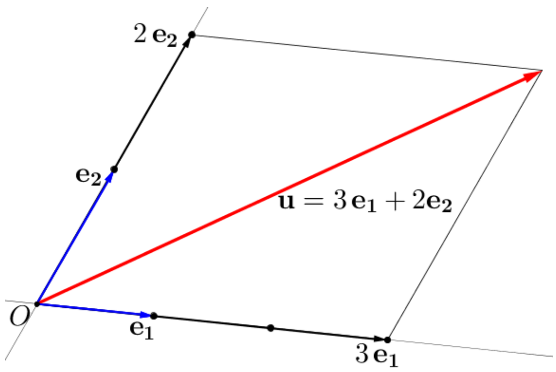
## 1.8 Esercizio vettori in un sistema di riferimento nel piano

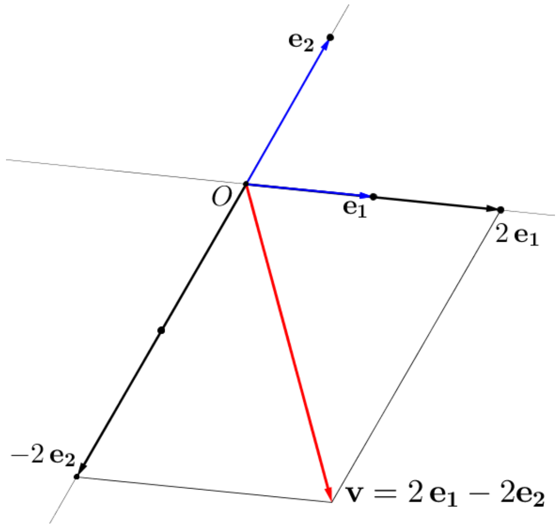
Si stampi la figura o la si riproduca su un foglio e si rappresentino i vettori

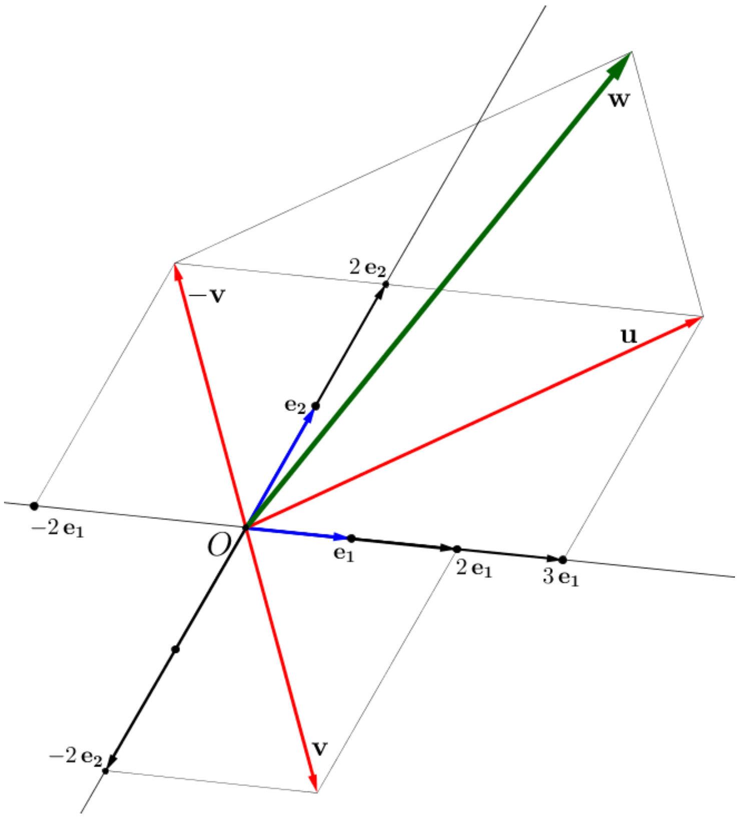
$\mathbf{u} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$




**Soluzione**

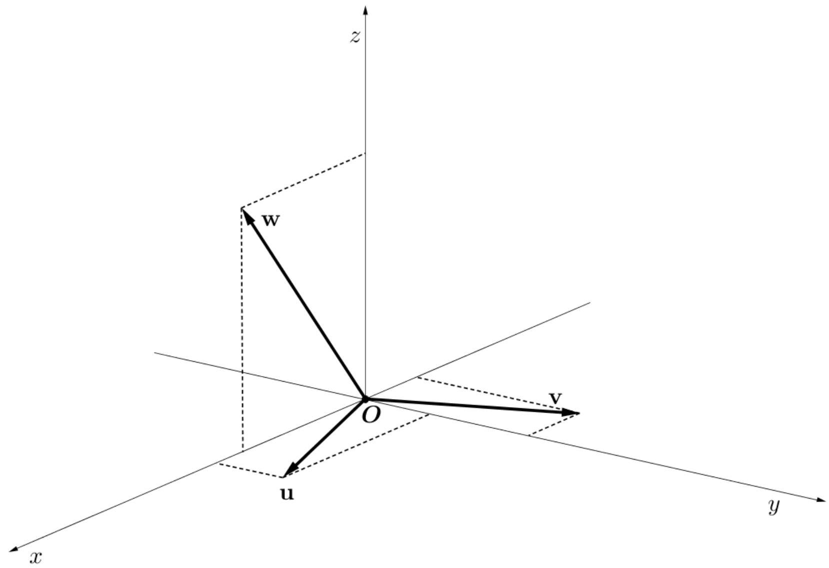


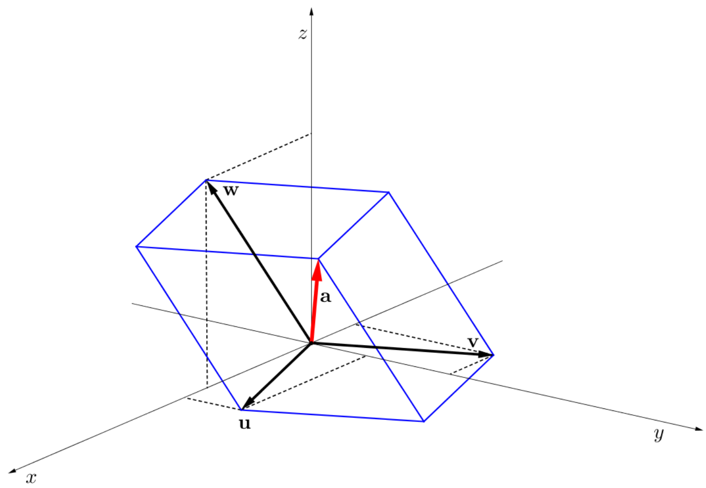
## 1.9 Esercizio rappresentazione sul piano di un sistema di riferimento nello spazio

Nella figura si vede una rappresentazione assonometrica di un sistema di riferimento cartesiano nello spazio, che ha centro nel punto $O$ e assi $x, y, z$. Nella figura sono rappresentati i vettori **u**, **v**, che sono applicati in $O$ e stanno sul piano coordinato $xy$; inoltre è rappresentato il vettore **w**, che è applicato in $O$ e sta sul piano coordinato $xz$.
Si rappresenti il parallelepipedo che ha come spigoli i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Si rappresenti infine il vettore $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$.




**Soluzione**

Il parallelepipedo è rappresentato nella figura qui sotto. A questo indirizzo `http://ggbtu.be/mZr1qGzp9` si trova un file della figura assegnata qui sopra, da cui lo studente è invitato a partire per realizzare la costruzione nella figura sotto.

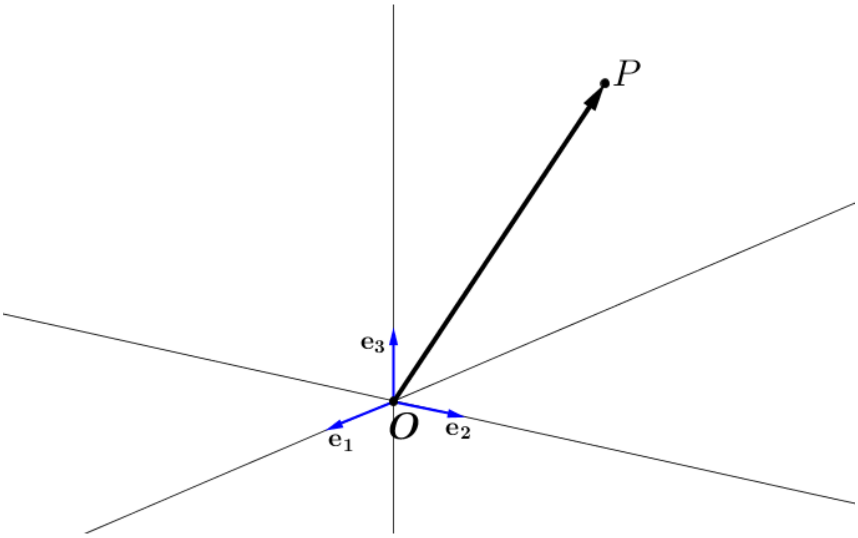



## 1.10 Esercizio saper vedere che uno stesso punto del piano rappresenta infiniti punti nello spazio

Nella figura si vede una rappresentazione assonometrica di un sistema di riferimento cartesiano nello spazio di centro $O$ e versori $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$. Nella figura sono rappresentati anche un punto $P$ e il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$, che pensiamo come un vettore applicato in $O$. Il punto $P$ ha coordinate $(x_P, y_P, z_P)$ e si ha $\overrightarrow{OP} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ dove i vettori

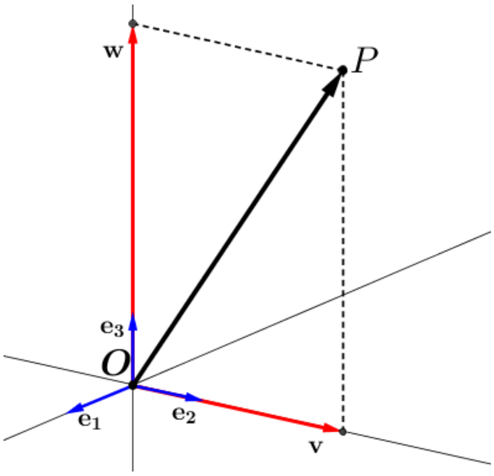
$$\mathbf{u} = x_P\, \mathbf{e_1} \qquad \mathbf{v} = y_P\, \mathbf{e_2} \qquad \mathbf{w} = z_P\, \mathbf{e_3}$$

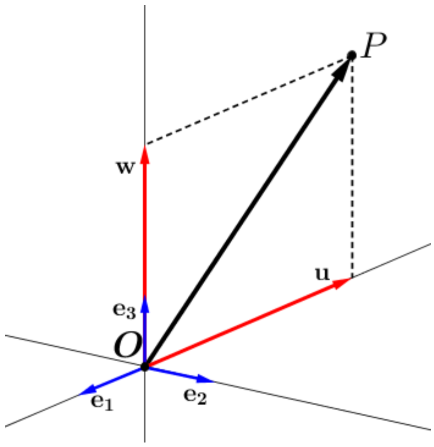
sono le componenti del vettore $\overrightarrow{OP}$.
Si costruiscano graficamente e si rappresentino le componenti $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ nei quattro casi seguenti
i. $x_P = 0$; ii. $y_P = 0$; iii. $z_P = 0$; iv. $x_P + y_P = 0$
Guardando la figura, si impari a visualizzare la posizione del punto $P$ nello spazio nei diversi casi, e a passare rapidamente dall'uno all'altro.

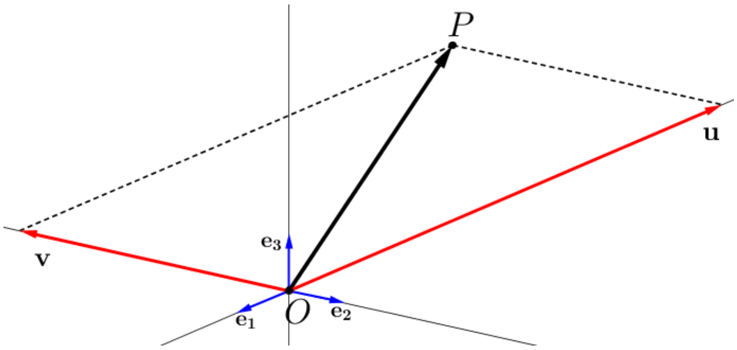


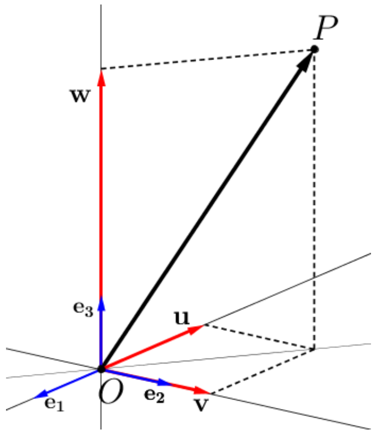

**Soluzione**

Le componenti sono rappresentate nelle figure qui sotto. A questo indirizzo `http://ggbtu.be/mvZAFgz3s` si trova un file della figura assegnata qui sopra, da cui lo studente è invitato a partire per realizzare le costruzioni delle figure sottostanti.



# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 2 foglio di esercizi - 29 febbraio 2016

**Le operazioni nello spazio $\mathbf{R}^2$. Corrispondenza con lo spazio dei vettori applicati in un punto del piano. Punti e rette in $\mathbf{R}^2$. Esempi elementari di funzioni lineari.**

Premettiamo agli esercizi alcune definizioni, notazioni e osservazioni che riprendono argomenti svolti nelle lezioni.

### 2.1 Esercizio Lo spazio $\mathbf{R}^2$

Consideriamo l'insieme delle *coppie ordinate* di numeri reali, ossia il prodotto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, che denotiamo brevemente $\mathbf{R}^2$. Un elemento di $\mathbf{R}^2$ si denota ad esempio $x = (x_1, x_2)$. Due elementi $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ di $\mathbf{R}^2$ sono uguali se e solo se $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$. Ricordiamo che:

- la *somma* $x + y$ di due elementi $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ di $\mathbf{R}^2$ è definita come la coppia $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- il *prodotto* $tx$, per ogni $x \in \mathbf{R}^2$ e per ogni $t \in \mathbf{R}$, è definito come la coppia $(tx_1, tx_2)$;
- se $x = (x_1, x_2)$, la coppia $(-x_1, -x_2)$ si denota $-x$ e si dice *opposto* di $x$;
- con il simbolo $x - y$ si intende il vettore $x + (-y)$.

L'insieme $\mathbf{R}^2$, con le operazioni sopra indicate è uno *spazio vettoriale* sul campo $\mathbf{R}$ e si dice che i suoi elementi sono *vettori*. Quando può essere utile per avere maggiore chiarezza, il simbolo che denota un vettore si scrive in grassetto, ad esempio $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, oppure sopra al simbolo si pone una freccia, ad esempio $\vec{x}$. Il grassetto è più comodo nella scrittura tipografica e la freccia nella scrittura a mano. Questi accorgimenti grafici non sono però strettamente necessari e in diverse situazioni è meglio non utilizzarli, poiché appesantiscono la notazione, rendono più faticose la lettura e la comprensione e non sono effettivamente utili.

Si osserva che per ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$\mathbf{x} = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) \tag{2.1.1}$$

ossia vale

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} \qquad \text{dove} \quad \mathbf{e_1} = (1, 0), \ \mathbf{e_2} = (0, 1) \tag{2.1.2}$$

L'insieme dei vettori $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ si dice *base standard* di $\mathbf{R}^2$.
I vettori $x_1\mathbf{e_1}$ e $x_2\mathbf{e_2}$ si dicono *componenti di* $\mathbf{x}$.
I numeri $x_1, x_2$ si dicono *coordinate* del vettore $\mathbf{x}$ rispetto alla base standard.
La (2.1.2) si esprime anche dicendo che

il vettore $\mathbf{x}$ è *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$, con coefficienti $x_1, x_2$.

### 2.2 Esercizio Corrispondenza tra lo spazio $\mathbf{R}^2$ e lo spazio dei vettori applicati in un punto del piano

Sia $O$ un punto fissato del piano e chiamiamo $V$ lo lo spazio dei vettori applicati in $O$. Sia inoltre scelto un sistema di riferimento $\mathbf{Ov_1v_2}$ nel piano. Allora per ogni vettore $\mathbf{w} \in V$ esiste ed è unica una coppia ordinata $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ tale che $\mathbf{w} = x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2}$. L'elemento $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ di $\mathbf{R}^2$ si chiama *vettore delle coordinate di* $\mathbf{w}$ (nel sistema di riferimento scelto). Al vettore nullo di $V$ corrisponde la coppia $(0, 0)$ in $\mathbf{R}^2$, al vettore $\mathbf{v_1}$ corrisponde il vettore $\mathbf{e_1}$ e al vettore $\mathbf{v_2}$ corrisponde il vettore $\mathbf{e_2}$. Ricordiamo che questa corrispondenza conserva le operazioni che ci sono nei due spazi vettoriali. Precisamente, se indichiamo con la lettera $F$ la funzione che a ogni vettore $\mathbf{w} \in V$ associa il vettore $\mathbf{x} = F(\mathbf{w}) \in \mathbf{R}^2$, si ha

$$F(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{w}) \qquad F(t\mathbf{w}) = tF(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \ \forall t \in \mathbf{R}$$

Questo fatto si può esprimere dicendo che la funzione $F$ è un *isomorfismo* tra $V$ e $\mathbf{R}^2$. Grazie a questo isomorfismo possiamo identificare le coppie di numeri reali con i punti del piano e possiamo rappresentare i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ come sottoinsiemi del piano. Parleremo quindi di segmenti, triangoli, rette nello spazio $\mathbf{R}^2$. Gli stessi termini geometrici saranno poi utilizzati anche negli spazi $\mathbf{R}^n$.

## 2.3 Esercizio **Operazioni sui vettori di $\mathbf{R}^2$**

Si facciano le operazioni seguenti (il risultato è lo stesso nei tre casi):

$$(-1,3)+(2,3) \qquad 3(1,2)-(2,0) \qquad 6\left[\left(\frac{1}{2},-2\right)-(+\frac{1}{3},-3)\right]$$

**Soluzione**

Si ha

$$(-1,3)+(2,3)=(-1+2,3+6)=(1,6)$$

$$3(1,2)-(2,0)=(3,6)+(-2,0)=(1,6)$$

$$6\left[\left(\frac{1}{2},-2\right)-(\frac{1}{3},-3)\right]=6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3},-2+3\right)=(1,6)$$

## 2.4 Esercizio **Rappresentazione di punti e segmenti**

i. Si scrivano le componenti e le coordinate del vettore $\mathbf{x}=(2,1)\in\mathbf{R}^2$ rispetto alla base standard di $\mathbf{R}^2$.
Si scriva inoltre il vettore $\mathbf{x}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{a_1}=(0,-1)$ e $\mathbf{a_2}=(1,2)$.
ii. Preso un sistema di riferimento cartesiano $Oe_1e_2$ nel piano, si rappresentino graficamente il vettore $\mathbf{x}=(2,1)$ e le sue componenti rispetto alla base standard. Inoltre si rappresentino le componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alle direzioni dei vettori $\mathbf{a_1}=(0,-1)$ e $\mathbf{a_2}=(1,2)$.
iii. Si rappresenti il punto di coordinate $(2t,t)=t(2,1)$, per i seguenti valori di $t$: $-1, 2, 3, \frac{5}{2}, \sqrt{5}, \pi$. iv. Si rappresentino gli insiemi $A=\{t(2,1)\mid 1\le t\le 2\}$ e $B=\{t(2,1)\mid |t|\le 1\}$

**Soluzione**

i. Si può scrivere il vettore $\mathbf{x}=(\mathbf{2},\mathbf{1})$ come

$$\mathbf{x}=(2,0)+(0,1)=2(1,0)+1(0,1)=2\mathbf{e_1}+1\mathbf{e_1}$$

dove i numeri 2 e 1 sono le coordinate del vettore $(2,1)$ rispetto alla base standard e i vettori $(2,0)$ e $(0,1)$ sono le componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alle direzioni della base standard. In generale: le coordinate, *rispetto alla base standard*, di un elemento $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ sono semplicemente gli elementi $x_1$ e $x_2$ della coppia.

Consideriamo ora il problema di scrivere il vettore $\mathbf{x}=(2,1)$, e come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{a_1}=(0,-1)$ e $\mathbf{a_2}=(1,2)$. Questo vuol dire che cerchiamo due numeri $u_1$ e $u_2$ tali che

$$(2,1)=u_1(0,-1)+u_2(1,2) \tag{2.4.1}$$

Tali numeri si trovano facilmente: l'uguaglianza (2.4.1) equivale a

$$(2,1)=(0u_1+1u_2,-1u_1+2u_2)=(u_2,-u_1+2u_2)$$

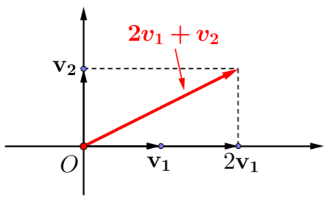
ossia al sistema

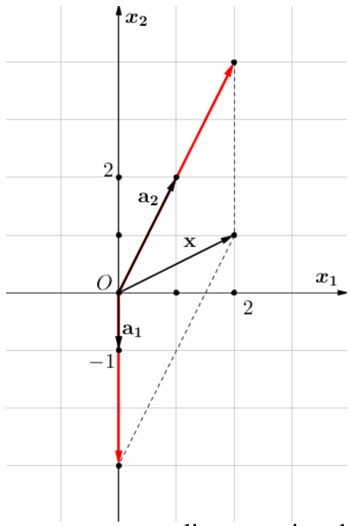
$$\begin{cases} \qquad\quad u_2 = 2 \\ -u_1 + 2u_2 = 1 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

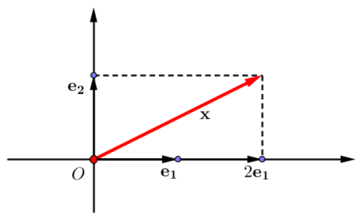
da cui si ricava immediatamente $u_1 = 3$ e in conclusione vale $\mathbf{x} = 3\mathbf{a_1} + 2\mathbf{a_2}$. Pertanto i coefficienti cercati della combinazione lineare sono 3 e 2.

Il problema di scrivere un vettore qualunque di $\mathbf{R}^2$ come combinazione lineare di due vettori assegnati sarà considerato in un foglio di esercizi successivo, ma gli studenti possono già affrontarlo. Dagli esercizi del foglio 1 si capisce geometricamente che per garantire l'esistenza di una decomposizione occorre che i vettori $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ siano non allineati. Dal punto di vista algebrico occorre invece che il sistema di equazioni corrispondente a (2.4.2) sia risolubile.

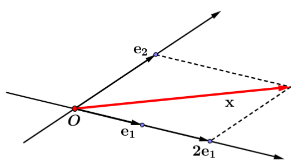
ii. Prendiamo un sistema di riferimento ortogonale $O\mathbf{v_1}\,\mathbf{v_2}$ nel piano, come nella figura sotto, a sinistra e in alto. Si ricordi che un sistema è ortogonale se i vettori $\mathbf{v_1}\,\mathbf{v_2}$ **sono perpendicolari e se inoltre sono della stessa lunghezza**. L'elemento $(2,1)$ di $\mathbf{R}^2$ si rappresenta allora con il vettore $2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ che gli corrisponde. Poiché il vettore $\mathbf{v_1}$ rappresenta il vettore $\mathbf{e_1}$, sulla figura scriviamo $\mathbf{e_1}$ al posto di $\mathbf{v_1}$ e facciamo la stessa cosa per $\mathbf{v_2}$. Inoltre scriviamo $\mathbf{x}$ al posto di $2\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$. In questo modo otteniamo la figura a sinistra in basso, che è uguale alla precedente, ma i nomi degli oggetti sono quelli dei corrispondenti oggetti in $\mathbf{R}^2$. Infine, nella figura sotto a destra è rappresentata la scrittura del vettore $\mathbf{x}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$.

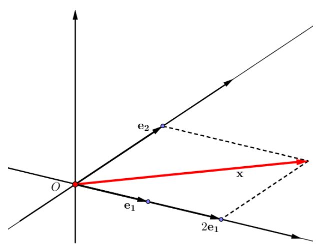


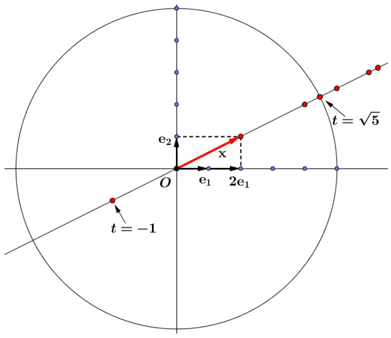



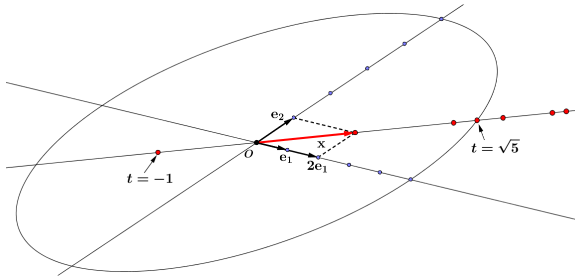

E' utile rappresentare i vettori rispetto a sistemi di riferimento non ortogonali, come si vede nella figura sotto a sinistra. In effetti questo è necessario in situazioni del tutto comuni, ad esempio quando il piano in cui si rappresentano i vettori è visto come un piano immerso nello spazio tre-dimensionale e quest'ultimo è rappresentato sul foglio in assonometria, come si vede nella figura sotto a destra. Si noti che cambiando il sistema di riferimento si conserva il parallelismo tra rette, ma non si conserva la perpendicolarità e in generale non si conservano gli angoli né le lunghezze.



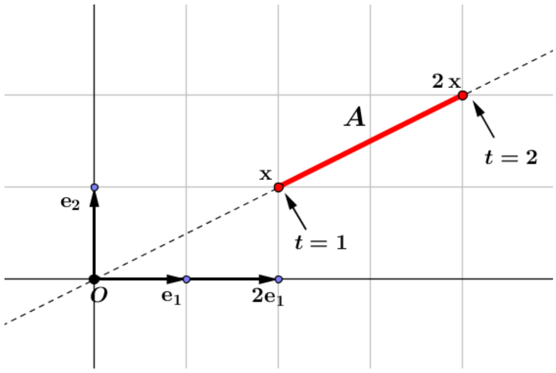



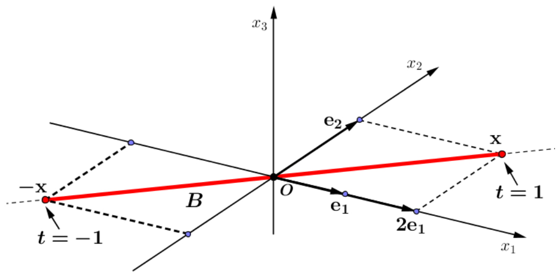

iii. I punti richiesti sono rappresentati nelle figure sotto. Nella figura a sinistra si utilizza un sistema di riferimento ortogonale, a destra si usa invece un sistema di riferimento non ortogonale. La figura a sinistra si trova on-line all'indirizzo `http://ggbtu.be/mRHz2kp6w` ed è modificabile. In particolare può essere trasformata nella figura di destra, prendendo con il mouse e poi spostando la punta dei vettori $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ del sistema di riferimento. Nella figura a sinistra si noti che il punto corrispondente a $t = \sqrt{5}$ sta sul cerchio di raggio 5 e centro nell'origine (perché?). Si noti che la trasformazione porta rette parallele in rette parallele, ma non si conserva l'ortogonalità né la lunghezza: il rettangolo diventa un parallelogramma e il cerchio si trasforma in un'ellisse. Si vedrà nel seguito del corso che questi fenomeni si possono descrivere e comprendere bene grazie agli strumenti dell'algebra lineare.






iv. Gli insiemi richiesti sono segmenti, rappresentati nelle figure sotto. A sinistra si vede l'insieme $A$, rappresentato in un sistema ortogonale. A destra si vede l'insieme $B$, rappresentato in assonometria su un piano coordinato di un sistema di riferimento ortogonale in tre dimensioni.






## 2.5 Esercizio **Equazioni di una retta**

i. Si mostri che l'insieme

$$\alpha = \{t(2,1) \mid t \in \mathbf{R}\} \tag{2.5.1}$$

è uguale all'insieme

$$r = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 = 2x_2\right\} \tag{2.5.2}$$

Ricordiamo che l'insieme $\alpha = r$ è una *retta* che passa per i punti $O = (0,0)$ e $P = (2,1)$.
Si dice che la (2.5.1) è una *parametrizzazione* della retta $\alpha$.
Un modo equivalente a (2.5.1) per descrivere la retta $\alpha$ è dire che è costituita dalle coppie $(x_1,x_2)$ tali

$$\begin{cases} x_1 &= 2t \\ x_2 &= t \end{cases} \tag{2.5.3}$$

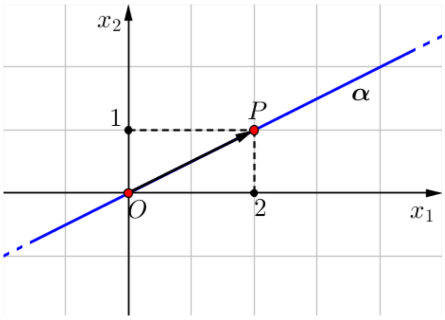
Si dice che la (2.5.3) è una *equazione parametrica* della retta $\alpha$.
L'equazione $x_1 = 2x_2$ che si usa nella (2.5.2) si dice *un'equazione cartesiana* della retta.
Si osservi che ci sono infinite equazioni parametriche e infinite equazioni cartesiane di una stessa retta.

ii. Si rappresentino graficamente le rette seguenti (sono parallele), e per ciascuna si scriva una equazione cartesiana

$\alpha = \{t(2,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$, $\beta = \{t(2,1)+(1,0) \mid t \in \mathbf{R}\}$, $\gamma = \{t(2,1)+(0,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$, $\delta = \{t(2,1)+(4,2) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

**Soluzione**

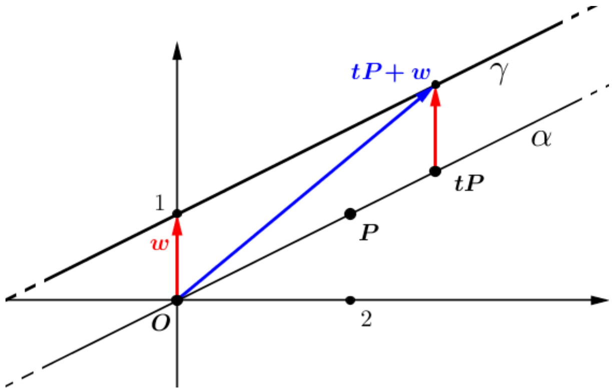
In via preliminare osserviamo che l'insieme $\alpha$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$ generato dal vettore $(2,1)$. La coppia ordinata $(2,1)$ viene qui rappresentata come un *punto* $P$, che a sua volta si può pensare come vettore $\overrightarrow{OP}$. Il sottospazio $\alpha$ di $\mathbf{R}^2$ generato dal vettore $(2,1)$ si rappresenta quindi come una *retta* nel piano, che passa per i punti $O$ e $P$.



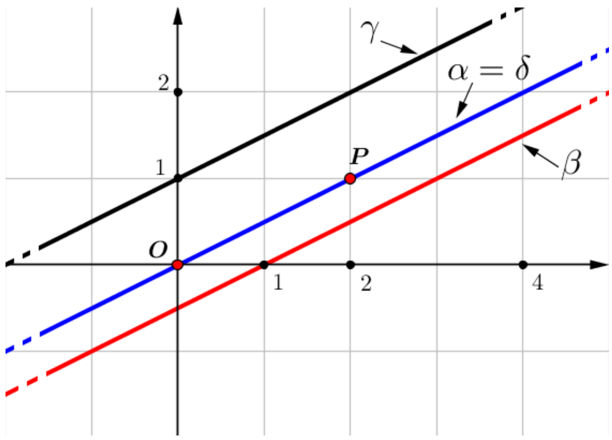

Svolgiamo ora il punto i. dell'esercizio. Per dimostare che gli insiemi $\alpha$ ed $r$ sono uguali faremo vedere che $\alpha \subset r$ e $r \subset \alpha$ . Mostriamo che $\alpha \subset r$: se $(x_1,x_2) \in \alpha$, allora esiste un $t \in \mathbf{R}$ tale che $(x_1,x_2) = (2t,t)$, pertanto si ha $x_1 = 2t$ e $x_2 = t$ e di conseguenza $x_1 = 2x_2$, e dunque $(x_1,x_2) \in r$. Mostriamo ora che $r \subset \alpha$: se $(x_1,x_2) \in r$, allora $x_1 = 2x_2$ e pertanto $(x_1,x_2) = (2x_2,x_2)$, ma questo vuol dire che $(x_1,x_2) \in \alpha$. Concludiamo pertanto che $\alpha = r$.

Svolgiamo il punto ii. dell'esercizio. Abbiamo già visto che l'insieme $\alpha$ è la retta individuata dal punto $O$ e dal punto $P = (2,1)$. Consideriamo poi l'insieme $\gamma$.

Per comprendere il significato geometrico dell'insieme $\gamma$ e rappresentarlo, conviene pensare che i suoi punti (o vettori) sono del tipo $tP + w$, dove si è posto $w = (0,1)$. In altre parole: i punti di $\gamma$ si ottengono aggiungendo il *vettore* $w$ ai *punti* del tipo $tP$ che stanno in $\alpha$. Dunque l'insieme $\gamma$ si ottiene traslando la retta $\alpha$ col *vettore* $w$ e corrisponde alla retta parallela ad $\alpha$ e che passa per il *punto* $w$. Nella figura a fianco si vede una rappresentazione grafica di quanto si è detto (il file si trova qui `http://ggbtu.be/mhcOi3m9x`) Si noti come abbiamo *interpretato* gli elementi di $\mathbf{R}^2$ talvolta come punti e talvolta come vettori o traslazioni, a seconda di come conviene! Queste interpretazioni geometriche-grafiche non sono parte della teoria dell'algebra lineare, che è puramente astratta, ma sono essenziali per pensare la matematica, utilizzarla e risolvere problemi.




In modo analogo si vede che l'insieme $\beta$ si ottiene traslando la retta $\alpha$ col vettore $(0,1)$. Ossia $\beta$ è la retta parallela ad $\alpha$ e che passa per $(0,1)$, come si vede nella figura a fianco.




Infine i punti dell'insieme $\delta$ si ottengono traslando i punti di $\alpha$ col vettore $(4,2)$, ma essendo quest'ultimo un punto di $\alpha$ la somma rimane in $\alpha$. Si ha pertanto $\alpha = \delta$.

Per completare l'esercizio dobbiamo ricavare le equazioni cartesiane delle rette. L'equazione di $\alpha$ è già nota dal punto i. Troviamo l'equazione di $\beta$: sappiamo che i punti di $\beta$ sono del tipo $t(2,1)+(1,0)$ ossia del tipo $(2t+1,t)$, al variare di $t$ in $\mathbf{R}$. Si ha cioè che per un punto generico $(x_1,x_2)$ di $\beta$ vale

$$x_1 = 2t+1 \qquad , \qquad x_2 = t$$

(nel punto i. le abbiamo chiamate *equazioni parametriche* della retta). Usiamo la seconda equazione per riscrivere la prima come

$$x_1 = 2x_2 + 1$$

e abbiamo ottenuto una *equazione cartesiana* di $\beta$, *esplicitata rispetto a* $x_1$. Altre forme equivalenti della stessa equazione sono

$$x_1 - 2x_2 = 1 \qquad , \qquad x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}$$

In modo analogo si ottiene una equazione cartesiana per la retta $\gamma$ : si scrivono le equazioni parametriche

$$x_1 = 2t \qquad , \qquad x_2 = t + 1$$

poi si ricava la $t$ da una delle due, ad esempio dalla prima (si cerca di prendere la più comoda, qui è più o meno lo stesso), e si sostituisce nell'altra. Si ottiene in questo modo l'equazione

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1$$

Altre forme equivalenti della stessa equazione sono

$$-\frac{x_1}{2} + x_2 = 1 \qquad , \qquad x_1 = 2x_2 - 1$$

## 2.6 Esercizio **Diverse equazioni di una stessa retta**

Si consideri la retta $\alpha = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x_1 + 4x_2 = 12\}$.

i. Si scriva l'equazione di $\alpha$ nella forma $x_2 = ax_1 + b$ e si dia una interpretazione grafica dei coefficienti $a$ e $b$.

ii. Si scriva l'equazione di $\alpha$ nella forma $x_1 = cx_2 + d$ e si dia una interpretazione grafica dei coefficienti $c$ e $d$.

iii. Si scriva l'equazione di $\alpha$ nella forma $\dfrac{x_1}{p} + \dfrac{x_2}{q} = 1$ e si dia una interpretazione grafica dei coefficienti $p$ e $q$.

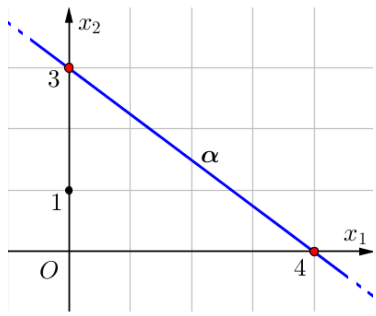
iv. Si scrivano almeno tre diverse equazioni parametriche della retta $\alpha$.

**Soluzione**

i. L'equazione della retta $\alpha$ si scrive

$$x_2 = -\frac{3}{4}x_1 + 3$$

In questa forma si dice esplicitata rispetto alla variabile $x_2$. Il coefficiente $-\frac{3}{4}$ è la *pendenza* della retta rispetto all'asse $x_1$, presa cioè $x_1$ come variabile di partenza; il termine 3 è la coordinata $x_2$ del punto in cui la retta interseca l'asse $x_2$.




ii. L'equazione si può scrivere anche esplicitando la variabile $x_1$:

$$x_1 = -\frac{4}{3} + 4$$

In questa forma si osserva (è una cosa che si vede immediatamente, non è da imparare a memoria...) che il coefficiente $-\frac{4}{3}$ è la *pendenza* della retta rispetto all'asse $x_2$, ed è l'inverso del coefficiente trovato al punto i, mentre il termine 4 è la coordinata $x_1$ del punto in cui la retta interseca l'asse $x_1$.

iii. Si può infine scrivere l'equazione nella forma

$$\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} = 1$$

dove i numeri 4 e 3 sono le coordinate dei punti in cui la retta interseca gli assi.

iv. Ogni equazione parametrica è del tipo $Q + tw$ , dove $Q$ è un punto della retta e $w$ è un *vettore direttore* della retta, ossia è la differenza tra due punti sulla retta stessa. Prendendo ad esempio $Q = (0,3)$ e $w = (4,0) - (0,3)$ si ottiene l'equazione parametrica

$$(0,3) + t(4,-3) \qquad \text{ossia} \qquad x_1 = 4t \ , \ x_2 = -3t + 3$$

Un'altra equazione parametrica è

$$(4,0)+t(-4,3) \qquad \text{ossia} \qquad x_1=-4t+4\ ,\ x_2=3t$$

Ancora un'altra equazione è ad esempio la seguente

$$(0,3)+t\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right) \qquad \text{ossia} \qquad x_1=\frac{4}{5}t\ ,\ x_2=-\frac{3}{5}t+3$$

che si ottiene dalla prima normalizzando il vettore direttore. In altre parole, con questa parametrizzazione la retta viene percorsa con velocità unitaria.

## 2.7 Esercizio **Rette parallele**

Per ogni $t\in\mathbf{R}$ fissato si consideri la retta $\alpha_t=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid 3x_1+4x_2=t\}$.

i. Preso un sistema di riferimento nel piano, si rappresenti la retta $\alpha_t$ per i valori $t=0,1,3,4,-1,-3,-4$.

ii. Si scriva un'equazione parametrica per la retta $\alpha_t$.

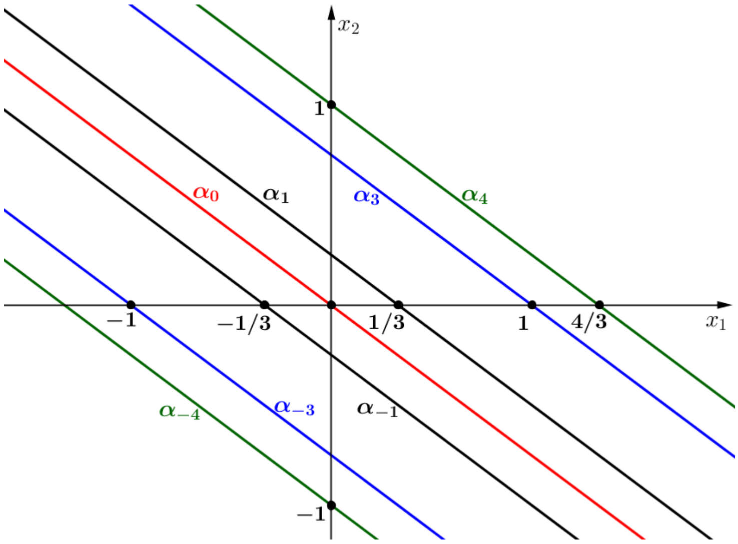
**Soluzione**

i. Le rette $\alpha_t$, per i valori richiesti di $t$, sono rappresentate nella figura a fianco, che si vede molto meglio a colori e a schermo piuttosto che stampata in b/n.

ii. Un'equazione parametrica per la retta $\alpha_t$ è ad esempio

$$Q+t(A-B)$$

dove $A=\frac{t}{3}$ e $B=\frac{t}{4}$ sono i punti di intersezione fra la retta $\alpha_t$ e gli assi.




## 2.8 Esercizio **Equazioni di una retta determinata da due punti**

Sia $r$ la retta passante per i punti $P=(3,1)$, $Q=(-2,-2)$. i. Si scriva un'equazione parametrica della retta $r$. ii. Dall'equazione parametrica di $r$ si ricavi un'equazione cartesiana. iii. Si scriva un'equazione cartesiana di $r$ senza passare per l'equazione parametrica.

**Soluzione**

i. Un'equazione parametrica per la retta $r$ è ad esempio $Q+t(P-Q)$ ossia

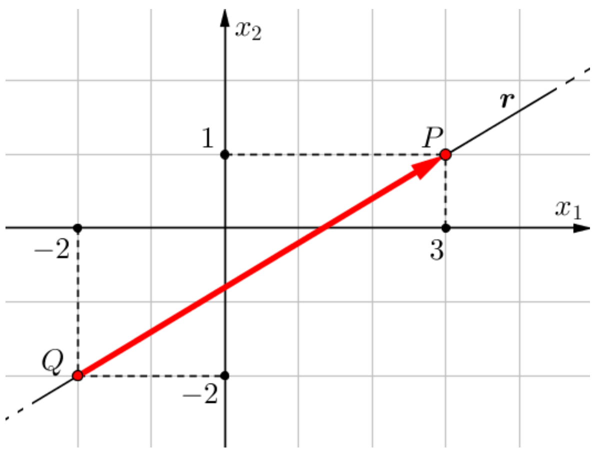
$$(-2,-2)+t(5,3)$$

ossia

$$x_1=5t-2\ ,\ x_2=3t-2$$

ii. Un'equazione cartesiana si ottiene dall'equazione parametrica ad esempio ricavando $t$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda. In questo modo si ottiene

$$x_2=3\frac{x_1+2}{5}-2=\frac{3}{5}x_1-\frac{4}{5}$$



iii. Posto $Q=(q_1,q_2)=(-2,2)$, un punto $(x_1,x_2)$ appartiene alla retta se e solo se il rapporto

$$\frac{x_2-q_2}{x_1-q_1}$$

è costante e uguale alla pendenza della retta, che è $\dfrac{3}{5}$. Da questo si ricava un'equazione cartesiana per la retta.

## 2.9 Esercizio **Intersezione di rette**

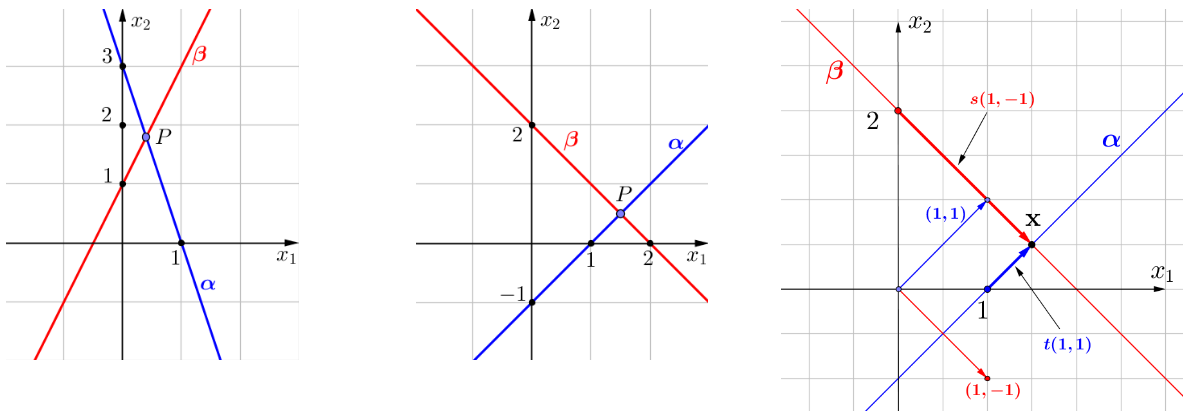
i. Si trovi l'intersezione delle rette $\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid 3x_1+x_2=3\}$ , $\beta=\{(0,1)+t(1,2) \mid t\in\mathbf{R}\}$.

ii. Si trovi l'intersezione delle rette $\alpha=\{(t+1,t) \mid t\in\mathbf{R}\}$ , $\beta=\{(t,-t+2) \mid t\in\mathbf{R}\}$.

iii. Si trovi l'intersezione delle rette $\alpha=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid x_1+2x_2=4\}$ , $\beta=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \mid -2x_1+x_2=-3\}$.

### Soluzione

i. Un punto $P=(x_1,x_2)$ appartiene alla retta $\beta$ se e solo se $x_1=t$ , $x_2=2t+1$ per qualche $t\in\mathbf{R}$. Ma se appartiene inoltre alla retta $\alpha$ si deve avere anche $3=3x_+x_2=3t+(2t+1)=5t+1$. Si ottiene dunque che $t=\frac{2}{5}$ e in conclusione $x_1=\frac{2}{5}$ , $x_2=\frac{9}{5}$. La soluzione è rappresentata nella figura sotto a sinistra.




Affrontiamo ora il punto ii. e ragioniamo come segue: un punto $P=(x_1,x_2)$ appartiene a entrambe le rette se valgono entrambe le seguenti affermazioni:

$(x_1,x_2)=(t+1,t)$ per un opportuno $t\in\mathbf{R}$

$(x_1,x_2)=(s,-s+2)$ per un opportuno $s\in\mathbf{R}$

dove nella seconda equazione si è usato un simbolo diverso da $t$, e precisamente $s$, poiché l'opportuno valore del parametro per cui vale la prima affermazione non è detto che sia lo stesso per cui vale la seconda, e trovare un punto che appartiene a entrambe le rette equivale a trovare due numeri $t,s$ che verificano le affermazioni di sopra, ossia equivale a trovare una soluzione del sistema

$$\begin{cases} t+1 &= s \\ t &= -s+2 \end{cases} \tag{2.9.1}$$

Sommando le equazioni si ha $2t+1=2$, da cui si ricava $t=\frac{1}{2}$ dopo di che, senza neppure bisogno di conoscere $s$, si ottiene che il punto di intersezione è

$$x_1=t+1=\frac{1}{2}+1 \qquad , \qquad x_2=t=\frac{1}{2}$$

Come controllo si può ricavare $s$ (in questo caso è comodo sottrarre la seconda equazione dalla prima) e si ottiene $s=-\frac{3}{2}$, a cui corrisponde il punto $(x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{3}{2}+2)$ , che è lo stesso già trovato.

Le due rette e il punto di intersezione sono rappresentate nella figura di sopra, in centro, ma conviene rappresentare la situazione in un modo più aderente alla descrizione parametrica delle rette e al ragionamento che si è fatto per trovare la soluzione. Questa rappresentazione si trova nella figura sopra a destra, che ora spieghiamo: l'equazione parametrica di $\alpha$ si può scrivere anche nella forma vettoriale $\mathbf{x} = (1,0) + t(1,1)$; analogamente l'equazione parametrica di $\beta$ si scrive $\mathbf{x} = (0,2) + s(1,-1)$. L'intersezione si ha quando il vettore $t(1,1)$, applicato al punto $(1,0)$ arriva nello stesso punto $\mathbf{x}$ in cui arriva il vettore $s(1,-1)$, applicato al punto $(0,2)$.

Per rispondere al punto iii. è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ -2x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$$

La soluzione è $(2,1)$ e non occorre fare la figura.

## 2.10 Esercizio Funzioni lineari $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

i. Si verifichi che la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da $f(x) = 3x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, è *lineare*, ossia soddisfa le condizioni

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{e} \qquad f(tx) = tf(x) \qquad \text{comunque siano presi } x,y,t \in \mathbf{R} \tag{2.10.1}$$

ii. Si consideri il *grafico* della funzione $f$, ossia l'insieme $E = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \in \mathbf{R}\}$ . Si osservi che l'insieme $E$ è una retta e se ne scriva un'equazione cartesiana e una equazione parametrica. Si rappresenti il grafico di $f$ e si dia una interpretazione geometrica delle condizioni (2.10.1)

iii. Si verifichi che ogni funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ del tipo $f(x) = kx$, dove $k \in \mathbf{R}$ è fissato, soddisfa la condizione (2.10.1).
Si dia una interpretazione geometrica della costante $k$.

iv. Si mostri con un esempio che la funzione $g(x) = 3x + 1$ non soddisfa le condizioni (2.10.1).

v. Si mostri che ogni funzione lineare $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ è del tipo $f(x) = kx$.

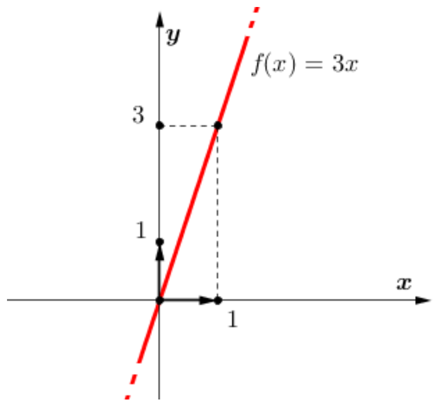
### Soluzione

i. Comunque presi $x, y, t$ in $\mathbf{R}$ si ha

$$f(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = f(x) + f(y) \qquad\qquad f(tx) = 3(tx) = t(3x) = tf(x)$$

ii. Il grafico $E$ della funzione $f$ è l'insieme dei punti $(x,y)$ in $\mathbf{R}^2$ tali che $(x,y) = (x,3x) = x(1,3)$. In altre parole, l'insieme $E$ è il sottospazio vettoriale generato dal vettore $\mathbf{w} = (1,3)$, ossia una retta. Una equazione parametrica della retta $E$ è quella già appena scritta. Equazioni cartesiane sono invece ad esempio $y = 3x$ e $y - 3x = 0$.

Le condizioni (2.10.1) si possono interpretare geometricamente dicendo che, comunque dati due punti del grafico di $f$, che hanno rispettivamente $x$ e $y$ come prima coordinata, il punto del grafico che ha coordinata $x+y$ si ottiene sommando i due punti dati (pensati come vettori).




iii. Si verifica immediatamente, come nel punto i. , che valgono le (2.10.1). Una interpretazione geometrica del coefficiente $k$ è la seguente: preso un punto qualsiasi del grafico, il rapporto fra la seconda coordinata e la prima è costante e vale $k$; il numero $k$ è quindi la *pendenza* della retta. Si noti anche che $k = f(1)$, ossia il punto del grafico che ha 1 come prima coordinata, ha $k$ come seconda coordinata. Il numero $k$ si chiama anche *coefficiente angolare* della retta. Il coefficiente $k$ determina completamente la funzione lineare $f$. Una funzione lineare da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ è una relazione di *proporzionalità diretta* fra le variabili scalari $x$ e $f(x)$. Il concetto di funzione lineare tra spazi vettoriali di dimensione maggiore di uno generalizza alle variabili vettoriali il concetto di proporzionalità diretta.

iv. Si possono prendere ad esempio i valori $x = 0$ e $y = 1$ e si trova che $g(x+y) = g(1) = 4$, mentre $g(x) + g(y) = 1 + 4 = 5$. Analogamente si vede che è falsa la seconda condizione. Si noti che il grafico di $g$ è una retta, ma la funzione $g$ **non** è lineare! In effetti la funzione $g$ non è una proporzionalità diretta.

v. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione lineare, ossia che verifica le condizioni (2.10.1). Allora, per ogni $x \in \mathbf{R}$ posso pensare che $x = x \cdot 1$ e dalla seconda delle (2.10.1) ottengo $f(x) = xf(1)$. Se ora pongo $k = f(1)$ ho trovato proprio che $f(x) = kx$, come si voleva.

## 2.11 Esercizio **Funzioni lineari $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$**

Sia $\mathbf{w}$ un vettore in $\mathbf{R}^2$ e sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ la funzione definita da $f(t)=t\mathbf{w}$ per ogni $t\in\mathbf{R}$. Osserviamo che se $\mathbf{w}=(w_1,w_2)$ allora si ha $f(t)=(tw_1,tw_2)$. Chiamiamo $U$ l'insieme *immagine* della funzione $f$, ossia $U=\{f(t)\mid t\in\mathbf{R}\}$.

i. Si verifichi che la funzione $f$ è lineare, ossia valgono le condizioni

$$f(t+s)=f(t)+f(s) \qquad \text{e} \qquad f(\lambda t)=\lambda f(t) \qquad \text{comunque siano presi } t,s,\in\mathbf{R} \text{ e } \lambda\in\mathbf{R} \quad (2.11.1)$$

ii. Si consideri il caso di $\mathbf{w}=(-2,1)$ e per la corrispondente funzione $f$ si rappresenti l'immagine $U$ della funzione $f$, che è una retta. Si vede che la funzione $f$ è equivalente a dare una descrizione parametrica della retta $U$.

iii. Si comprenda bene che l'immagine di $f$ **NON** è il grafico di $f$. Cos'è il grafico di $f$?

iv. Si consideri la funzione $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ definita da $g(t)=t(-1,2)+(2,-2)$ per ogni $t\in\mathbf{R}$. Si rappresenti l'immagine della funzione $g$ e si osservi che è una retta. Si mostri con un esempio che la funzione $g$ **non** è però lineare.

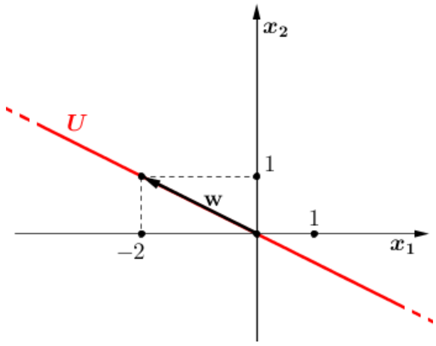
v. Si mostri che ogni funzione lineare $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ è del tipo $f(t)=t\mathbf{w}$.

**Soluzione**

i. Comunque presi $s,t,\lambda$ in $\mathbf{R}$ si ha

$$f(s+t)=(s+t)\mathbf{w}=s\mathbf{w}+t\mathbf{w}=f(s)+f(t) \qquad\qquad f(\lambda t)=(\lambda t)\mathbf{w}=\lambda(t\mathbf{w})=\lambda f(t)$$

ii. L'immagine della funzione $f$ non è altro che l'insieme dei vettori di $\mathbf{R}^2$ del tipo $t\mathbf{w}$, dove $t\in\mathbf{R}$, dunque è il sottospazio vettoriale generato da $\mathbf{w}$, ossia una retta. Nel caso in cui $\mathbf{w}=(-2,1)$ la retta è rappresentata nella figura a fianco.



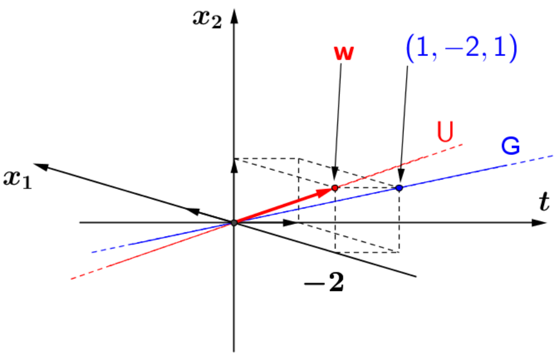

iii. Il grafico della funzione $f$ è l'insieme

$$G=\{(t,f(t))\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\mid t\in\mathbf{R}\}$$

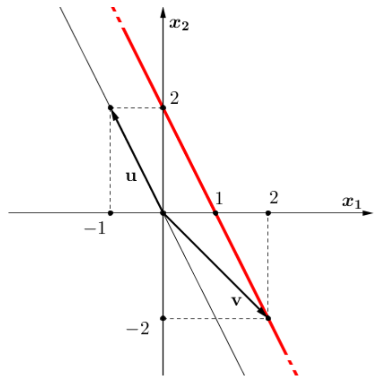
che nel caso $\mathbf{w}=(-2,1)$ si può descrivere come

$$G=\{(t,x_1,x_2)\in\mathbf{R}^3\mid t\in\mathbf{R},\ x_1=-2t,\ x_2=t\}$$
$$=\{t(1,-2,1)\in\mathbf{R}^3\mid t\in\mathbf{R}\}$$

Si vede dunque che $G$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ generato dal vettore $(1,-2,1)$, ossia è una retta nello spazio $\mathbf{R}^3$. L'insieme immagine di $f$ è invece una retta in $\mathbf{R}^2$, che si può identificare con la proiezione di $G$ sul piano coordinato $\Pi$ costituito dai vettori del tipo $\{(0,x_1,x_2)\}$, dove $x_1,x_2\in\mathbf{R}$. Il piano $\Pi$ si può anche caratterizzare come il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. La situazione è rappresentata nella figura a destra.




iv. L'immagine della funzione $g$ è la retta parametrizzata da $\mathbf{v}+t\mathbf{u}$ dove si è posto $\mathbf{u}=(-1,2)$ e $\mathbf{v}=(2,-2)$. La retta passa per i punti $(1,0)$ e $(0,2)$ ed è rappresentata in colore rosso nella figura a fianco.




v. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ una funzione lineare, ossia che verifica le condizioni (2.11.1). Allora, per ogni $t\in\mathbf{R}$ posso pensare che $t=t\cdot 1$ e dalla seconda delle (2.11.1) ottengo $f(t)=tf(1)$. Se ora pongo $\mathbf{w}=f(1)$ ho trovato proprio che $f(x)=t\mathbf{w}$, come si voleva.

### 2.12 Esercizio **Funzioni lineari $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$**

Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = 2x_1 - 3x_2$ per ogni $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ . Si prenda nota del fatto che in questo esercizio non stiamo scrivendo in grassetto i simboli dei vettori.

i. Si verifichi che la funzione $f$ è lineare, ossia valgono le condizioni

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad f(tx) = tf(x) \qquad \text{comunque siano presi } x, y \in \mathbf{R}^2 \text{ e } t \in \mathbf{R} \tag{2.12.1}$$

ii. Si rappresenti il grafico della funzione $f$ ossia l'insieme $E = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \mid x \in \mathbf{R}^2\}$ .

iii. Si rappresentino gli insiemi di livello $E_t = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid f(x) = t\}$ della funzione $f$.

iv. Si rappresentino gli insiemi di livello della funzione $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $h(x) = x_1 + x_2 + 3$ per ogni $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ e si osservi che sono rette. Si rappresenti il grafico della funzione $h$ e si osservi che è un piano. Si mostri con un esempio che la funzione $h$ non è lineare.

v. Si mostri che ogni funzione lineare $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è del tipo $g(x) = a_1x_1 + a_2x_2$, dove $a_1, a_2$ sono numeri reali, che si dicono coefficienti di $g$.

**Soluzione**

i. Comunque siano presi $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ in $\mathbf{R}^2$ e comunque sia $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x+y) = f((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = f(x_1+y_1, x_2+y_2) = 2(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2) = [2x_1 - 3x_2] + [2y_1 - 3y_2] = f(x) + f(y)$$

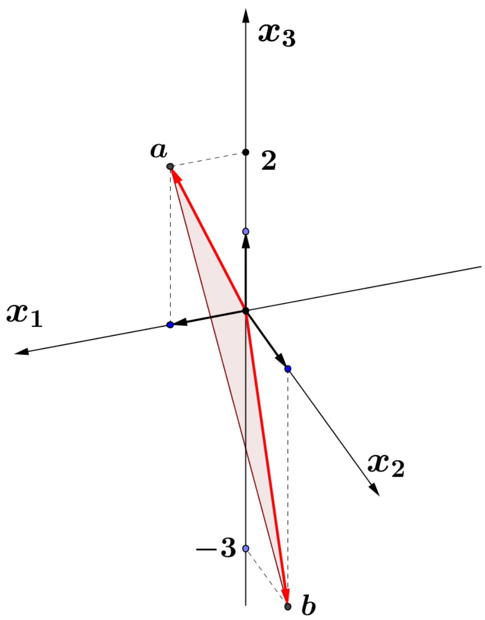
$$f(tx) = f(t(x_1,x_2)) = f(tx_1, tx_2) = 2(tx_1) - 3(tx_2) = t[2x_1 - 3x_2] = tf(x)$$

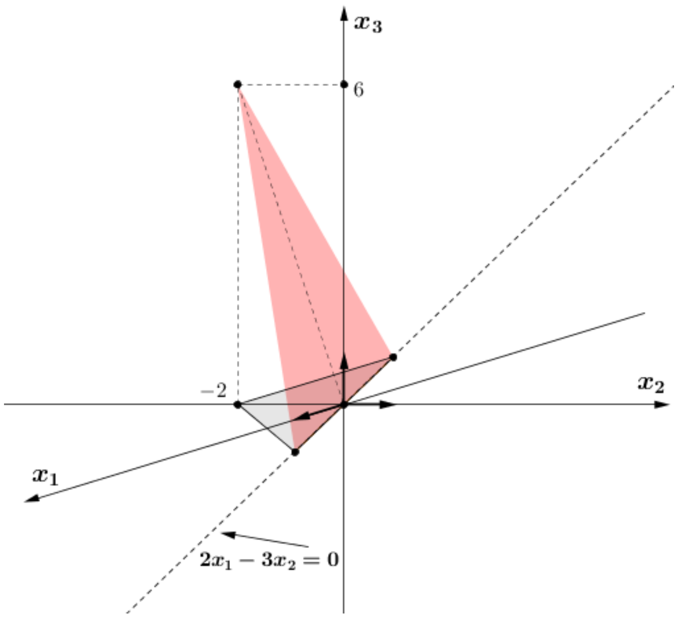
ii. Per rappresentare il grafico $E$ di $f$, conviene ricordare da **??** che per ogni $x \in \mathbf{R}^2$ si ha $x = x_1e_1 + x_2e_2$ e quindi, grazie alla linearità di $f$ appena vista al punto i., il generico punto del grafico si può scrivere come

$$(x_1, x_2, f(x)) = (x_1, x_2, f(x_1e_1 + x_2e_2)) = (x_1, x_2, x_1f(e_1) + x_2f(e_2)) = (x_1, 0, x_1f(e_1)) + (0, x_2, x_2f(e_2)) =$$

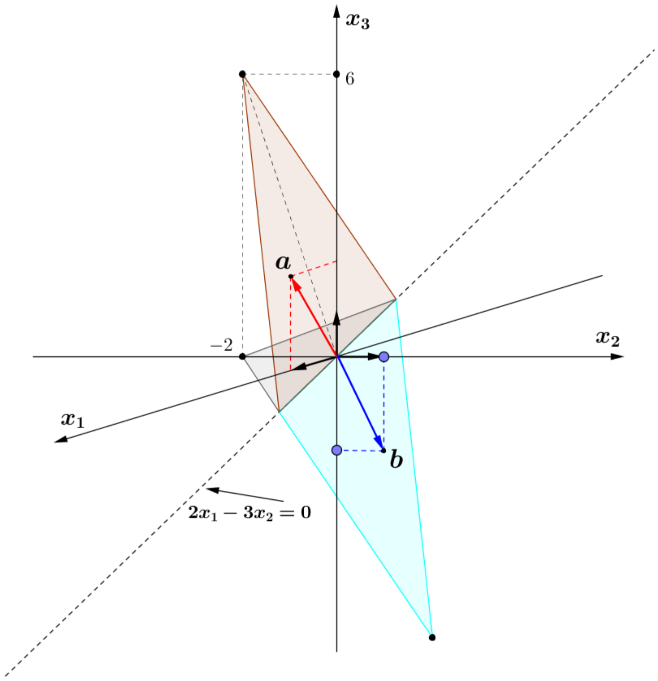
$$x_1(1, 0, f(e_1)) + x_2(0, 1, f(e_2)) = x_1(1, 0, 2) + x_2(0, 1, -3)$$

Si vede quindi che il grafico di $f$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $a = (1, 0, 2)$ e $b = (0, 1, -3)$ , ossia è il piano che passa per l'origine e per i punti $a$ e $b$. Il vettore $a$ ha la seconda componente uguale a zero, cioè si trova sul piano coordinato $x_1x_3$. Invece il vettore $b$ ha la prima componente uguale a zero, cioè si trova sul piano coordinato $x_2x_3$. La situazione è rappresentata nella figura sotto a sinistra, dove è anche ombreggiato il triangolo di vertici $O, a, b$. Non è facile visualizzare un piano, in genere si cerca di vederne una porzione, ad esempio una figura che giace sul piano, tipicamente un triangolo o un parallelogramma. Nella figura a destra si vede un altro triangolo sul medesimo piano $E$: il lato in basso sta sulla retta di equazione $2x_1 - 3x_2 = 0$, ossia la retta in cui il piano $E$ interseca il piano $x_3 = 0$, e il vertice in alto è scelto su un piano coordinato, in un posto comodo da individuare.



Infine, nella figura qui sotto, alla figura precedente vengono aggiunti: un altro triangolo sul piano $E$, simmetrico del primo triangolo e di colore turchese; un triangolino sul piano $x_1x_2$, proiezione ortogonale del primo triangolo; i vettori $a$ e $b$ della prima figura. Occorre un po' di esercizio per imparare a vedere gli oggetti 3D nelle figure 2D...




iii. Gli insiemi di livello della funzione $f$ sono le rette di equazione $2x_1 - 3x_2 = t$, tutte parallele fra loro. L'insieme di livello zero è la retta di equazione $2x_1 - 3x_2 = 0$, che è rappresentata nella figura sopra.

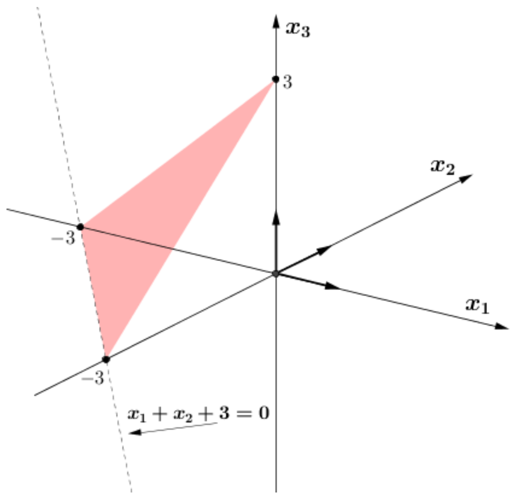
iv. Gli insiemi di livello della funzione $h$ sono descritti dall'equazione $h(x) = t$, ossia $x_1 + x_2 + 3 = t$, pertanto sono rette parallele fra loro. Il livello zero è la retta

$$x_1 + x_2 = -3$$

Il grafico $G$ della funzione $h$ è costituito dai punti del tipo

$$(0,0,3) + x_1(1,0,1) + x_2(0,1,1)$$

In altre parole $G$ si ottiene traslando con il vettore $(0,0,3)$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$. Nella figura a destra si vede una porzione del grafico di $h$ e precisamente il triangolo che ha come vertici i punti in cui il piano interseca gli assi. Le coordinate di questi punti si trovano facilmente, ponendo uguali a zero due delle coordinate nell'equazione del piano, che è $x_3 = x_1 + x_2 + 3$.




La funzione $h$ non verifica le condizioni (2.12.1), infatti basta prendere ad esempio $x = (0,0)$ e $t = 2$ e si trova che $f(tx) = f(0) = 3$, mentre $tf(x) = 6$. Però il grafico di $h$ è un piano.

v. Sia $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione lineare, ossia che verifica le (2.12.1). Allora per ogni $x \in \mathbf{R}^2$ si ha

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1 f(e_1) + x_2 f(x_2)$$

ora basta porre $a_1 = f(e_1)$ e $a_2 = f(e_2)$ e si ottiene $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2$ come si voleva.
Vediamo quindi che, analogamente a quanto già visto per le funzioni di una variabile, *tutti i polinomi di primo grado in due variabili hanno come grafico un piano, ma sono funzioni lineari solo se il termine costante vale zero*, ossia se il grafico passa per l'origine. Tuttavia si segnala che nel linguaggio corrente dell'ingegneria e della fisica capita spesso che un polinomio di primo grado sia chiamato "funzione lineare", anche se ha il termine costante diverso da zero.

# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 3 foglio di esercizi - 7 marzo 2016

**Punti e sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$. Lunghezza, angoli, area. Rette e piani in $\mathbf{R}^3$. Spazi vettoriali e sottospazi.**

### 3.1 Esercizio lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$

Per lo spazio $\mathbf{R}^3$, senza copiare da libri o appunti, si scrivano per esteso definizioni e notazioni in modo analogo a quanto fatto per lo spazio $\mathbf{R}^2$ nelle sezioni 2.0.1 e 2.0.2 del foglio di esercizi n.2 del 29 febbraio.

### 3.2 Esercizio visualizzazione e rappresentazione di punti e sottoinsiemi in $\mathbf{R}^3$ - lunghezza e area

i. Preso un sistema di riferimento ortogonale $O\mathbf{e_1}\mathbf{e_2}\mathbf{e_3}$, si visualizzino come punti e come vettori dello spazio i punti di $\mathbf{R}^3$ sotto indicati. Si rappresentino inoltre gli stessi punti in assonometria su un foglio piano.

$$A = (1,1,0) \qquad B = (1,0,1) \qquad C = (0,1,1) \qquad D = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} \qquad E = -\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \tag{3.2.1}$$

$$P = A + B \qquad Q = A - B \qquad R = A + B + C \qquad A + 3\mathbf{e_3} \tag{3.2.2}$$

ii. Si visualizzi e si rappresenti il segmento di estremi $D$ ed $E$ e se ne calcoli la lunghezza.

iii. Si visualizzi e si rappresenti il triangolo di vertici $A, B, C$ e se ne calcoli il perimetro e l'area.

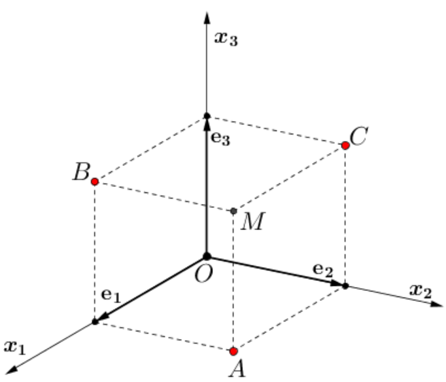
iv. Si mostri che esiste una ed una sola circonferenza passante per i punti $A, B, C$ e se ne calcoli la lunghezza.

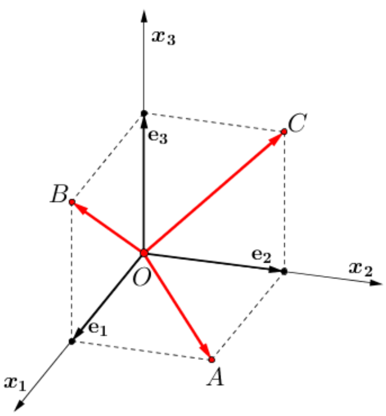
v. Si mostri che esiste una ed una sola sfera passante per i punti $O, A, B, C$ e si calcoli il volume dell'insieme interno alla sfera. Cosa si può dire della piramide che ha come vertici i punti $O, A, B, C$?

vi. Si scrivano le coordinate di tutti i vertici di un cubo, sapendo che tre vertici di una sua faccia sono i punti $A, B, C$.

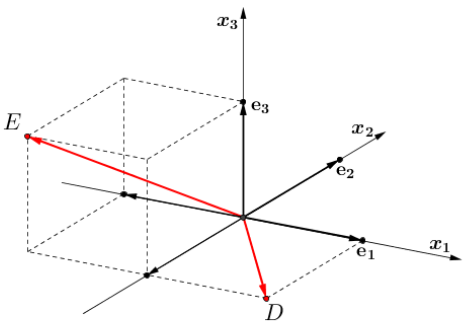
#### Soluzione

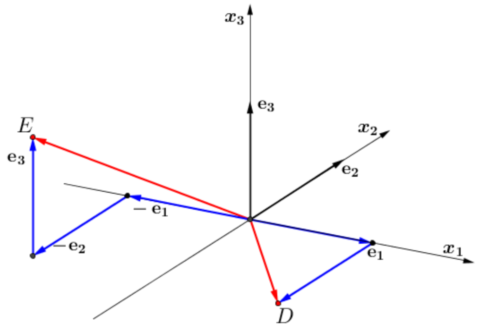
i. Nella figura sotto a sinistra sono rappresentati i punti $A, B, C$ in un sistema di riferimento cartesiano. A destra sono rappresentati gli stessi punti come segmenti orientati uscenti dall'origine. La figura a sinistra si trova all'indirizzo `http://ggbtu.be/mjE6tE6za` e la si può scaricare oppure modificare on-line, ad esempio prendendo con il mouse gli estremi dei vettori $\mathbf{e_i}$ e muovendoli in altre posizioni.



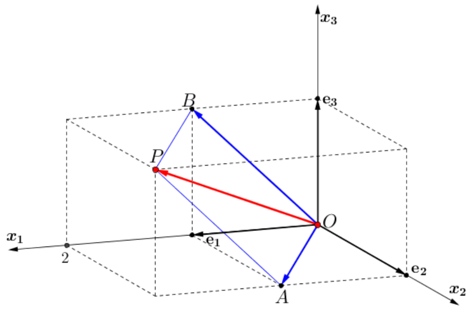



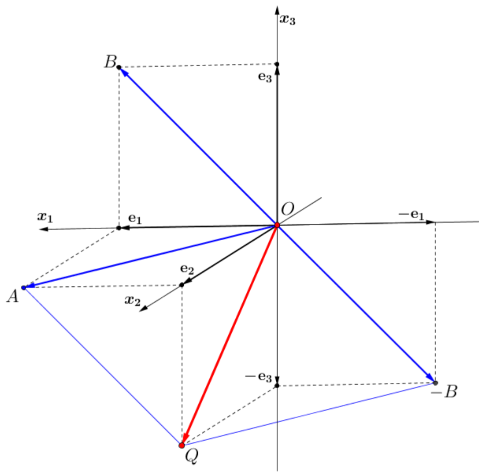

Nella figura sotto a sinistra sono rappresentati i punti $E, D$ come segmenti orientati in un sistema di riferimento cartesiano. A destra si vede come gli stessi vettori si possono rappresentare come somme di segmenti orientati nelle direzioni degli assi.

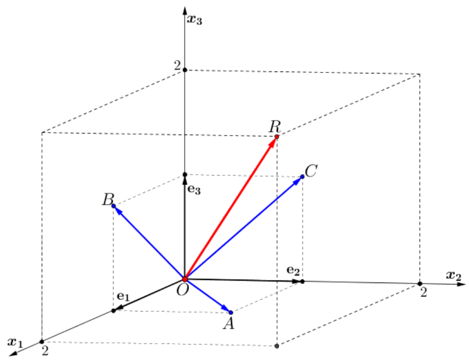


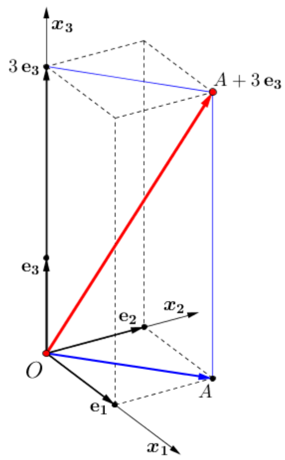




Nelle figure sotto sono rappresentati in vario modo i punti $P$, $Q$, $R$, $A+3\mathbf{e_3}$. Si suggerisce agli studenti di realizzare le rappresentazioni anche da altri punti di vista, ossia ruotando il sistema di riferimento, sia a mano che con opportuni software grafici. All'indirizzo `http://ggbtu.be/mwtewrmTJ` si trova la figura che rappresenta il punto $P$, da cui si può partire per realizzarne altre.



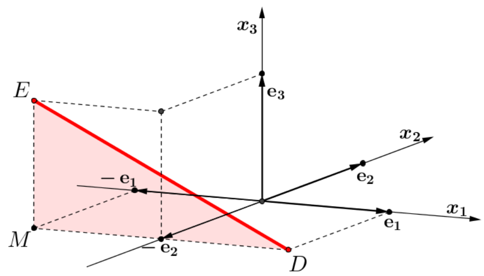



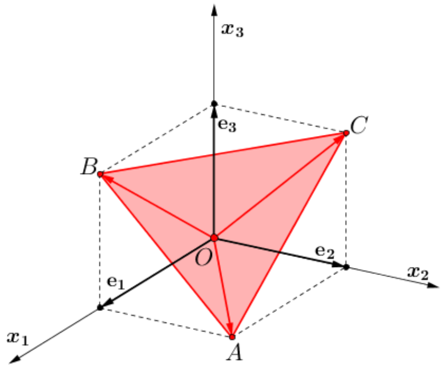




ii. Senza bisogno di rappresentare il segmento di estremi $D$ ed $E$ ne possiamo calcolare la lunghezza. Si ha che $D=(1,-1,0)$, $E=(-1,-1,1)$ dunque $D-E=(2,0,-1)$. Pertanto, detta $\ell$ la lunghezza del segmento di estremi $D$ ed $E$, si ha che $\ell^2=(D-E)\cdot(D-E)=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

Nella figura a fianco è rappresentato il segmento di estremi $D$ ed $E$ e si vede che il calcolo appena fatto equivale ad applicare il teorema di pitagora al triangolo di vertici $E$, $M$, $D$.

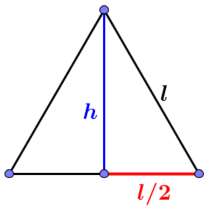


iii. Il triangolo di vertici $A, B, C$ è rappresentato nella figura sulla destra. Si vede immediatamente che si tratta di un triangolo equilatero, infatti i tre lati sono i vettori




$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1, 1);$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, 1, 0);$$
$$\overrightarrow{CA} = A - C = (1, 0, -1)$$

ciascuno dei quali ha lunghezza $l = \sqrt{2}$.
Da questo segue immediatamente che il perimetro del triangolo è $3\sqrt{2}$.

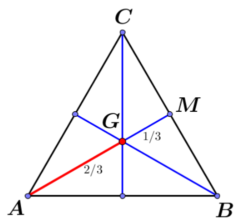



Essendo il triangolo equilatero, le altezze sono anche le mediane e, con riferimento alla figura sulla destra, si ottiene

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}$$

In conclusione, $\text{Area}\,(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

iv. I tre punti $A, B, C$ individuano un piano e il problema è quello di trovare la circonferenza $\gamma$ che giace in quel piano e passa per quei punti, che si dice circonferenza *circoscritta* al triangolo di vertici $ABC$. Il centro della circonferenza è equidistante dai vertici e pertanto appartiene ai tre assi del triangolo. Poiché il triangolo in questione è equilatero, gli assi sono anche mediane.




Nella geometria euclidea elementare è noto che il punto $G$ di intersezione delle mediane di un triangolo, detto anche baricentro, divide ciascuna mediana in due parti che sono una il doppio dell'altra. Con riferimento alla figura sulla destra si vede quindi che

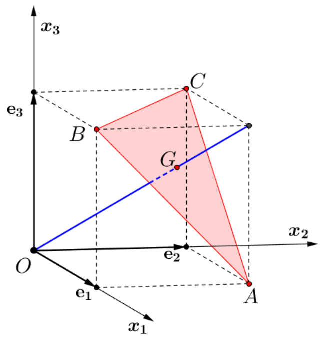
$$G = A + \frac{2}{3}(M - A) = A + \frac{2}{3}\left(\frac{B + C}{2} - A\right) = \frac{A + B + C}{3}$$

Dunque la circonferenza cercata ha centro $G = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e raggio $r$ uguale alla lunghezza del vettore $\overrightarrow{AG}$:

$$r = \sqrt{(G - A) \cdot (G - A)} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

In conclusione la circonferenza ha lunghezza $\pi \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Il raggio $r$ si può calcolare anche senza utilizzare l'informazione di dove i punti si trovano nello spazio e usando solamente l'informazione che il triangolo $ABC$ è equilatero e la lunghezza del lato. Questo è un problema nel piano e si risolve immediatamente utilizzando ad esempio il teorema di Pitagora, prima per calcolare $AM$ e poi $AG$. Si lascia al lettore la verifica che in questo modo si ottiene lo stesso risultato.

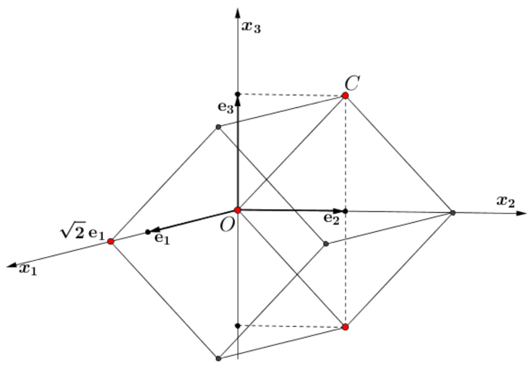
v. Il centro $D$ della sfera passante per i punti $O, A, B, C$ è equidistante dai punti $O$, $A$, $B$, $C$ , ossia è tale che $|D-O| = |D-A| = |D-B| = |D-C|$ . Ne segue in particolare che il punto $D$ appartiene alla retta $r$, perpendicolare al piano $\alpha$ su cui giace il triangolo $ABC$ e che passa per il centro $G$ della circonferenza $\gamma$. Per trovare un vettore $\mathbf{w}$ ortogonale al piano $\alpha$, basta cercarlo in modo che si abbia $\mathbf{w}\cdot(B-A)=0$ e $\mathbf{w}\cdot(C-A)=0$ e si vede immediatamente che un tale vettore è $\mathbf{w}=(1,1,1)$ . Quindi un'equazione parametrica della retta $r$ è $G+t\mathbf{w}$ dove $t\in\mathbf{R}$ è il parametro. È allora immediato che l'origine appartiene ad $r$ e dunque un'altra, più comoda equazione parametrica della retta è $(t,t,t)$ . Si deve quindi trovare un punto $D=(t,t,t)$ equidistante da $O$ e da uno degli altri punti, diciamo $A$.




A questo punto, con un semplice calcolo algebrico si ottiene $t=\dfrac{1}{2}$ e perciò il raggio della sfera è $r=|D-O|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. In conclusione il volume dell'insieme interno alla sfera è $V=\dfrac{4\pi}{3}r^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

Infine, la piramide che ha come vertici i punti $O, A, B, C$ ha i quattro spigoli uguali, ossia è un tetraedro regolare, e il suo baricentro $G=\dfrac{A+B+C+O}{4}$ risulta essere il centro $D$ della sfera.

vi. Si possono trovare due cubi con le caratteristiche richieste. Uno dei due cubi è rappresentato nella figura a fianco. Si lascia al lettore il calcolo delle coordinate dei vertici.




## 3.3 Esercizio angoli, lunghezza, prodotto scalare

i. Con riferimento ai punti (che sono pensati anche come vettori) introdotti nell'esercizio precedente, si calcolino i seguenti prodotti scalari

$$A\cdot B \qquad C\cdot B \qquad E\cdot D \qquad (B-A)\cdot(C-A) \tag{3.3.1}$$

ii. Si trovi la misura dell'angolo formato dai segmenti $OA$ e $OB$.

iii. Si trovi la misura degli angoli che la diagonale di un cubo, che parte da un vertice $M$, forma con i tre spigoli del cubo uscenti da $M$.

iv. Si calcolino il coseno, il seno e la tangente dell'angolo formato dai vettori $\mathbf{u}=3\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2}$ e $\mathbf{v}=\mathbf{e_3}+2\mathbf{e_2}$.

v. Si calcoli l'area del triangolo che ha come vertici l'origine $O$ e i punti $G=(2,1,0)$ e $H=(1,2,3)$.

**Soluzione**

i. $\quad A\cdot B=(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1=1 \qquad C\cdot B=(0,1,1)\cdot(1,0,1)=1$

Il prodotto scalare $E\cdot D$ si può calcolare utilizzando le coordinate di $E$ e $D$ oppure si usando la *proprietà distributiva*, che si può pensare anche come *linearità del prodotto scalare in ciascuna delle due variabili*. Si ha così:

$$\begin{aligned}
E\cdot D &= (-\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3})\cdot(\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}) \\
&= \mathbf{e_1}\cdot(-\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3})-\mathbf{e_2}\cdot(-\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) && (\text{ora usiamo che } \mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3} \text{ sono vettori a due a due ortogonali}) \\
&= -\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{e_2} && (\text{ora usiamo che } \mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3} \text{ sono vettori di lunghezza unitaria}) \\
&= -1+1=0
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il calcolo del prodotto scalare $(B-A)\cdot(C-A)$ osserviamo che $B-A=(0,-1,1)$ e $C-A=(-1,0,1)$, pertanto $(B-A)\cdot(C-A)=1$ .

ii. Sia $\alpha$ l'angolo formato dai segmenti $OA$ e $OB$. Sappiamo che $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\alpha$ dunque

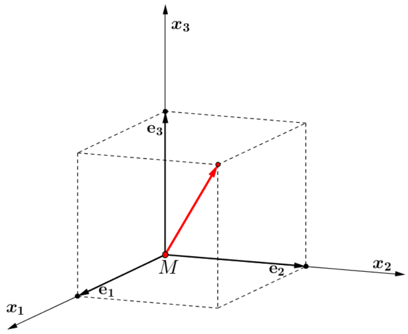
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

Dunque $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ ; questo era facilmente prevedibile dal momento che si tratta di un triangolo equilatero.

iii. Sia $\mathbf{w}=\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$ ; posto $\alpha_1$ l'angolo tra $\mathbf{w}$ ed $\mathbf{e_1}$, si ha che

$$\cos\alpha_1=\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{e_1}}{|\mathbf{w}|\,|\mathbf{e_1}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad\alpha_1\approx 0.96\text{ rad},\ 54.74^\circ$$

Inoltre si osserva che gli angoli $\alpha_2$ formato da $\mathbf{w}$ con $\mathbf{e_2}$ e $\alpha_3$ formato da $\mathbf{w}$ con $\mathbf{e_3}$ sono uguali ad $\alpha_1$ .

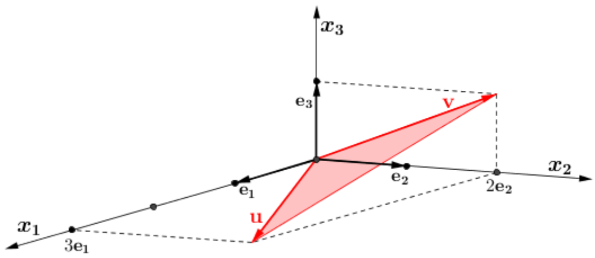



iv. Detto $\beta$ l'angolo formato dai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si ha

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}=\frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{16}{65}}=\frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{7}{4}$$




v. Sia $\gamma$ l'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{OG}$ e $\overrightarrow{OH}$ . L'area del triangolo $OGH$ si può calcolare come metà del prodotto di un lato per l'altezza $h$ corrispondente. Se prendiamo il segmento $OG$ come lato, allora l'altezza è $h=|OH|\sin\gamma$ e, utilizzando i vettori e il prodotto scalare, si ottiene

$$\text{Area}\,(OGH)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OG}|\cdot\underbrace{|\overrightarrow{OH}|\cdot\sin\gamma}_{h}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OG}|\cdot|\overrightarrow{OH}|\cdot\sqrt{1-\cos^2\gamma}\qquad\text{dove}\qquad\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OH}}{|\overrightarrow{OG}|\,|\overrightarrow{OH}|}$$

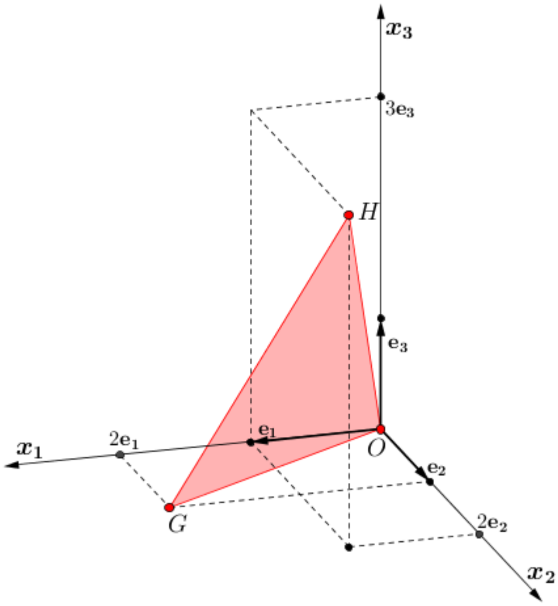
In altri termini si ha

$$\text{area}\,(OGH)^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{OG}|^2\cdot|\overrightarrow{OH}|^2-\left(\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OH}\right)^2\right)\tag{3.3.2}$$

e dunque nel caso in esame

$$\text{area}\,(OGH) = \left(\frac{5\cdot 14 - 16}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Si osservi che la formula (3.3.2) vale in generale per ogni triangolo di cui si conoscono due lati come vettori.
Nella figura a fianco è rappresentato il triangolo $OGH$ .




## 3.4 Esercizio rette in $\mathbf{R}^3$

Se $\mathbf{w}$ è un vettore di $\mathbf{R}^3$, allora il sottospazio vettoriale generato da $\mathbf{w}$ è l'insieme

$$\alpha = \{t\mathbf{w} \mid t \in \mathbf{R}\} \tag{3.4.1}$$

Supponiamo che $\mathbf{w}$ sia diverso dal vettore nullo. Allora $\alpha$ è la retta passante per l'origine e il punto $\mathbf{w}$.
Se $P$ è un punto di $\mathbf{R}^3$, allora l'insieme

$$\beta = \{P + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \alpha\} \tag{3.4.2}$$

è la retta ottenuta traslando $\alpha$ con il vettore $\mathbf{w}$. La retta $\beta$ è costituita da tutti e soli i punti del tipo

$$P + t\mathbf{w} \tag{3.4.3}$$

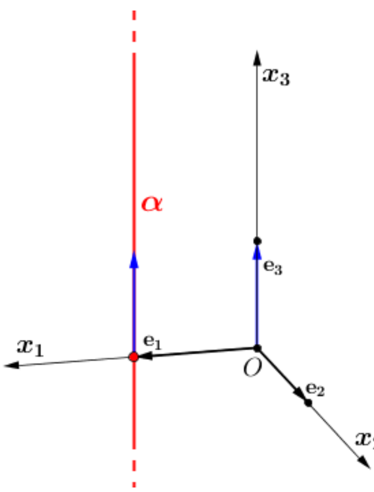
La (3.4.3) si dice *equazione parametrica della retta* $\alpha$.
i. Si visualizzino e si rappresentino in assonometria le rette che hanno le seguenti equazioni parametriche

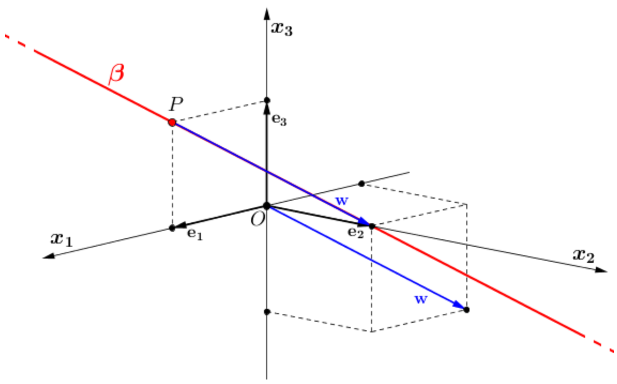
$$\alpha = \{\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_3 \mid t \in \mathbf{R}\} \qquad \beta = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + t(-1,1,-1) \mid t \in \mathbf{R}\} \tag{3.4.4}$$

ii. Si scriva un'equazione parametrica delle rette bisettrici del triangolo che ha vertici $A = (1,1,0)$ , $B = (1,0,1)$ , $C = (0,1,1)$

**Soluzione**

i. Nelle figure sotto sono rappresentate le rette $\alpha$ e $\beta$.



ii. Scriviamo l'equazione della bisettrice relativa al vertice $A$. Poiché i lati $AB$ e $AC$ sono uguali, la bisettrice è la mediana. Questo fatto semplifica molto il problema. Infatti, detto $M$ il punto medio del lato $BC$, si ha $M = \dfrac{B+C}{2} = (1,1,2)$ e l'equazione della bisettrice è $A+t(M-A)) = (1+t, 1+t, 2t)$.

## 3.5 Esercizio **piani in $\mathbf{R}^3$ - equazione parametrica**

Se **u** e **v** sono *vettori* di $\mathbf{R}^3$, allora il sottospazio vettoriale generato da **u** e **v** è l'insieme $\alpha = \{t\mathbf{u}+s\mathbf{v} \mid t,s \in \mathbf{R}\}$.
Se **u** e **v** non sono allineati (ossia, se sono linearmente indipendenti), allora $\alpha$ è il piano passante per l'origine e per i *punti* **u** e **v**; se invece sono allineati, allora $\alpha$ è la retta su cui stanno entrambi i vettori.
Supponiamo che **u** e **v** siano non allineati. Se $P$ è un punto di $\mathbf{R}^3$, allora l'insieme $\beta = \{P+\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \alpha\}$ è il piano ottenuto traslando $\alpha$ con il vettore $P$. Si usa anche scrivere $\beta = P+\alpha$. Il piano $\beta$ è costituito da tutti e soli i punti del tipo

$$P+t\mathbf{u}+s\mathbf{v} \qquad t,s\in\mathbf{R} \tag{3.5.1}$$

La (3.5.1) si dice *equazione parametrica del piano* $\alpha$. Si vede bene la completa analogia con il caso della retta. Esattamente allo stesso modo si definiscono i *piani $k$-dimensionali* in $\mathbf{R}^n$, che sono i sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^n$ generati da $k$ vettori linearmente indipendenti o i loro traslati.

i. Si visualizzino e si rappresentino in assonometria i piani che hanno le seguenti equazioni parametriche (è sottinteso che ciascuno dei parametri $t$ ed $s$ varia in $\mathbf{R}$)

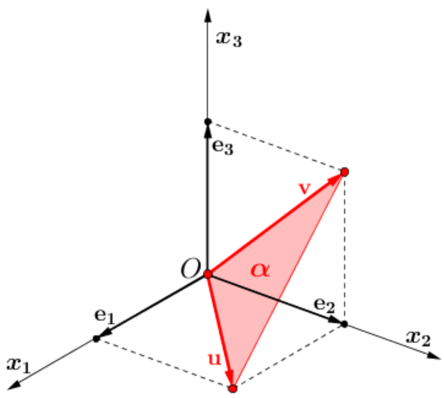
$$\alpha = \{t(1,1,0)+s(0,1,1)\} \qquad \beta = \{t\mathbf{e_2}+s\mathbf{e_3}\} \qquad \gamma = \{(t+s\,,\,2t\,,\,t-s)\}$$

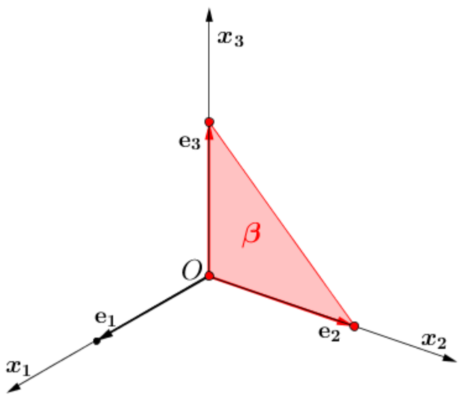
$$\delta = \{\mathbf{e_2}+t\mathbf{e_1}+s\mathbf{e_3}\} \qquad \eta = \{(t+1\,,\,1\,,\,t-2s+1)\} \qquad \mu = \{3\mathbf{e_1}+t(-\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})+s(\mathbf{e_1}-\mathbf{e_3})\}$$

ii. Si scrivano le equazioni parametriche del piano che passa per i punti $A=(0,-1,-2)$, $B=(2,-1,0)$
$C=(-1,3,2)$. Si visualizzi il piano e lo si rappresenti in assonometria.

**Soluzione**

i. La rappresentazione dei piani $\alpha$ e $\beta$ è immediata e si vede nelle figure sotto





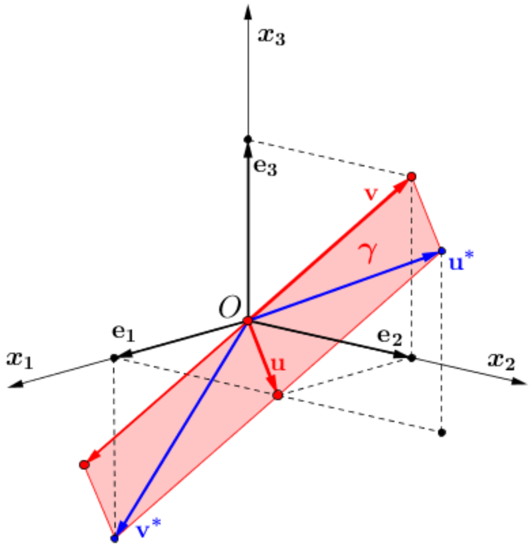
Per rappresentare il piano $\gamma$ conviene riscriverne l'equazione parametrica nella seguente forma, geometricamente più espressiva, in cui sono messi in evidenza i vettori che generano lo spazio

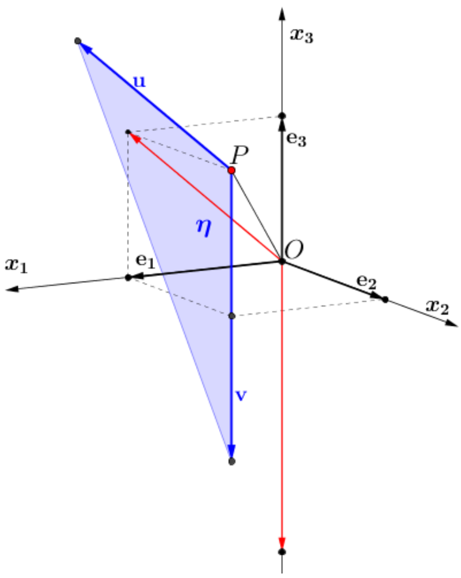
$$t(1,2,1)+s(1,0,-1)=t\mathbf{u}^*+s\mathbf{v}^*$$

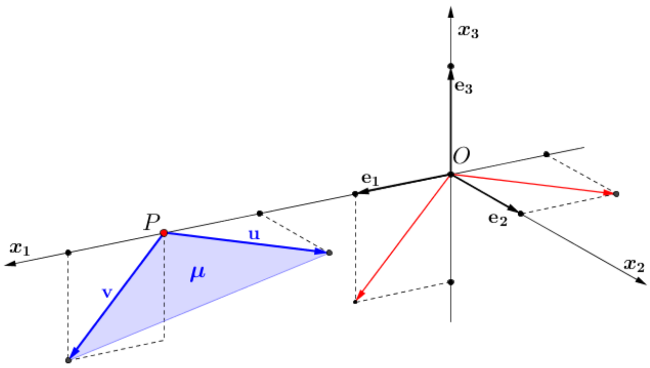
dove si è posto $\mathbf{u}^*=(1,2,1)$ e $\mathbf{v}^*=(1,0,-1)$. Il piano $\gamma$ è rappresentato nella figura a fianco, dove sono anche disegnati i vettori

$$u=\frac{1}{2}(u^*+v^*)=(1,1,0) \qquad v=\frac{1}{2}(u^*-v^*)=(0,1,1)$$

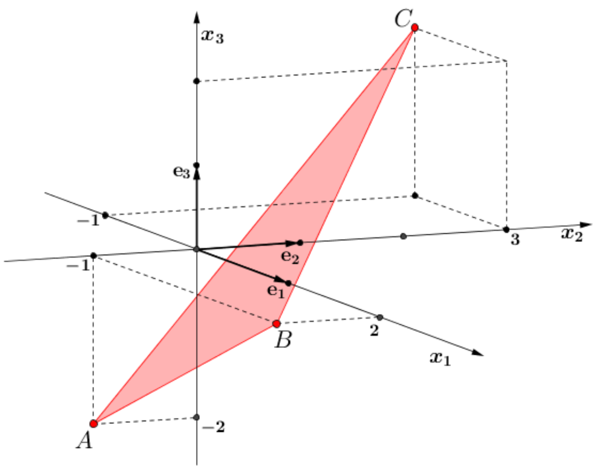
che sono un'altra base dello stesso piano.
Vediamo infine sotto le rappresentazioni dei piani $\eta$ e $\mu$.




ii. Una equazione parametrica del piano è la solita $A+t(B-A)+s(C-A)$. Una rappresentazione del piano si vede nella figura sotto.



## 3.6 Esercizio funzioni lineari $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ - nucleo ($\ker f$)

Una funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ si dice *lineare* se valgono le condizioni

$$f(x+y) = f(x)+f(y) \qquad f(tx) = tf(x) \qquad \text{comunque siano presi } x,y \in \mathbf{R}^3 \text{ e } t \in \mathbf{R} \tag{3.6.1}$$

che sono le stesse già viste nell'esercizio 2.10 per le funzioni lineari da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$. In effetti, allo stesso modo si definiscono le funzioni lineari fra due spazi vettoriali qualsiasi su uno stesso campo.

i. Si dimostri che una funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ è lineare se e solo se si può scrivere nella forma

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \qquad \text{dove } a_1, a_2, a_3 \text{ sono numeri reali} \tag{3.6.2}$$

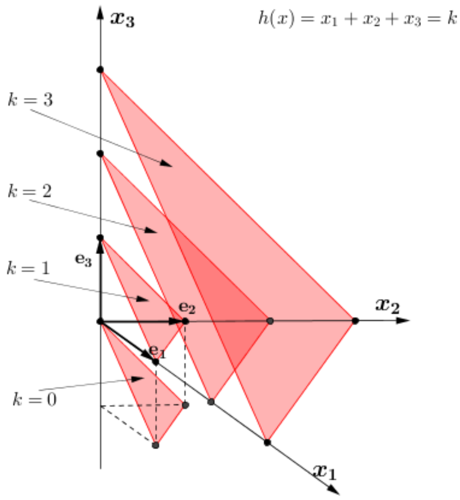
ii. Si mostri che se $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ è una funzione lineare, allora l'insieme degli elementi $x$ di $\mathbf{R}^3$ tali che $f(x)$ è uguale a zero è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$. Tale sottospazio si chiama *nucleo* (in inglese: *kernel*) della funzione $f$ e si denota comunemente con il simbolo $\ker f$.

iii. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x_1,x_2,x_3) = x_1$ e in questo caso si determini una base del sottospazio $\ker f$. Poiché la base ha due elementi, si deduca che $\ker f$ è un piano e se ne scriva un'equazione parametrica.

iv. Si ripeta il punto iii per le funzioni $g(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2$ e $h(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3$. Si mostri inoltre che l'insieme $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid h(x) = 3\}$ è un piano parallelo a $\ker h$, ossia si ottiene traslando $\ker h$ con un opportuno vettore.

**Soluzione**

Con riferimento al punto iv, ci limitiamo a dare una rappresentazione di alcuni triangoli che giacciono sui piani di equazione $x_1+x_2+x_3 = k$, per i valori $k = 0,1,2,3$.




## 3.7 Esercizio equazione cartesiana di un piano

i. Sia $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ una funzione lineare su $\mathbf{R}^3$ e supponiamo che i coefficienti $a_1, a_2, a_3$ non siano tutti nulli; si mostri allora che il sottospazio $\alpha = \ker f$ ha una base di due elementi e quindi è un piano. In questa situazione si dice che la relazione $f(x) = 0$ è un'equazione cartesiana del piano $\alpha$. Più in generale si mostri che, per ogni $k \in \mathbf{R}$, l'insieme dei punti $x \in \mathbf{R}^3$ tali che

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k \tag{3.7.1}$$

è un piano $\beta$ parallelo ad $\alpha$. Anche in questo caso si dice che la (3.7.1) è un'equazione cartesiana del piano $\beta$.

ii. Nel caso in cui $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3$ e $k = -2$ si determini un'equazione parametrica dei piani $\alpha$ e $\beta$.

iii. Si scriva un'equazione cartesiana dei piani $\mu$ ed $\eta$ che hanno le seguenti equazioni parametriche

$$\mu = \{(-s-1, t-1, t+1)\} \qquad \eta = \{(t+s, 2t+1, t-s-2)\} \tag{3.7.2}$$

**Soluzione**

i. Supponiamo che il coefficiente $a_1$ sia diverso da zero. Allora l'equazione $f(x) = 0$ è equivalente a

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3$$

Questo significa che l'insieme $\alpha$ si può pensare come il grafico della funzione

$$x_1 = g(x_2, x_3) = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3$$

Per ciascuna delle due coppie $(x_2, x_3) = (1, 0)$ e $(x_2, x_3) = (0, 1)$ si trova quindi un valore della coordinata $x_3$ e si ottengono i due vettori

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0\right) \qquad \mathbf{v} = \left(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1\right)$$

che sono linearmente indipendenti e generano il piano $\alpha$.

Per ogni $k \in \mathbf{R}$ poniamo

$$\alpha_k = \left\{x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = k\right\}$$

e osserviamo che ovviamente si ha $\alpha = \alpha_0$. Fissato $k$, fissiamo anche un elemento $y = (y_1, y_2, y_3)$ che appartiene ad $\alpha_k$, ossia tale che $f(y) = k$. Per la linearità della funzione $f$, per ogni $x \in \alpha$ si ha allora

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = k$$

e questo vuol dire che $x + y$ appartiene a $\alpha_k$. In questo modo abbiamo visto che traslando i punti di $\alpha$ con il vettore $y$ si ottengono punti di $\alpha_k$. Esaminando il ragionamento si vede che vale anche l'implicazione opposta: ogni punto di $\alpha_k$ si ottiene come traslato di un opportuno punto di $\alpha$. In conclusione, l'insieme $\alpha_k$ è un piano parallelo ad $\alpha$.

Della situazione appena descritta si parla anche nel modo seguente: si dice che $f(x) = k$ è una equazione lineare con termine noto $k$; se $k = 0$ si dice che l'equazione è *omogenea*; le terne $(x_1, x_2, x_3)$ che verificano $f(x) = 0$ si dicono *soluzioni dell'equazione omogenea*; le soluzioni dell'equazione non omogenea $f(x) = k$ sono tutte note se si conosce una soluzione particolare $y$ dell'equazione non omogenea e se si conoscono tutte le soluzioni $x$ dell'equazione omogenea; precisamente, una qualsiasi soluzione dell'equazione non omogenea si ottiene sommando $y$ con una opportuna soluzione $x$ dell'equazione omogenea. Tale situazione si trova ogni volta che si tratta con equazioni lineari, ad esempio nel caso delle equazioni differenziali lineari che si sono viste nel corso di Analisi matematica 1.

ii. Per trovare una equazione parametrica del piano $\alpha$, usiamo i due vettori di base $\mathbf{u} = (-2, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (-3, 0, 1)$. In questo modo otteniamo

$$x_1 = -2t - 3s\ ,\ x_2 = t\ ,\ x_3 = s$$

Per trovare una equazione parametrica del piano $\beta = \alpha_{-2}$ possiamo osservare che il punto $P = (-1, 0, 0)$ appartiene a $\beta$ e abbiamo quindi l'equazione $P + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, ossia

$$x_1 = -1 - 2t - 3s\ ,\ x_2 = t\ ,\ x_3 = s$$

iii. Riscriviamo l'equazione parametrica del piano $\mu$ come segue

$$\begin{cases} x_1 &= -s-1 \\ x_2 &= t-1 \\ x_3 &= t+1 \end{cases}$$

Osserviamo che il parametro $s$ si trova soltanto nell'espressione della la coordinata $x_1$, mentre $t$ si trova soltanto nelle espressioni di $x_2$ e $x_3$. Abbiamo quindi che il sistema si decompone in due parti indipendenti, che si possono risolvere separatamente. Eliminando $t$ dalle ultime due equazioni, otteniamo l'equazione

$$x_2 - x_3 = 0$$

che è l'equazione del piano $\mu$: comunque presi due numeri $x_1, x_2$ che verificano tale equazione, scegliendo arbitrariamente $x_1$ si ottiene un punto del piano $\mu$.

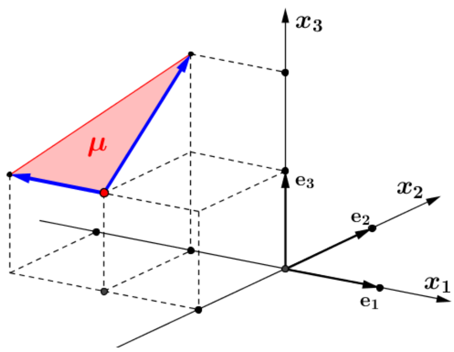
Riscriviamo ora l'equazione parametrica del piano $\eta$ come segue

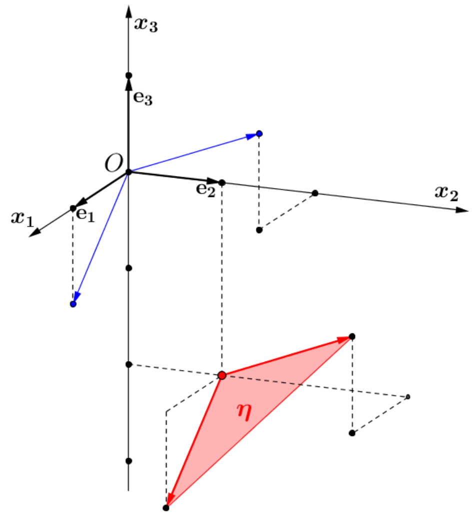
$$\begin{cases} x_1 &= t+s \\ x_2 &= 2t+1 \\ x_3 &= t-s-2 \end{cases}$$

Osserviamo che nell'espressione della coordinata $x_2$ si trova soltanto il parametro $t$ e questo consente di trovare immediatamente che $2t = x_2 - 1$. Sommando poi la prima e la terza equazione si trova la relazione $x_1 + x_3 = 2t - 2$, dove si può inserire il valore appena trovato per $2t$ e si ottiene l'equazione cartesiana del piano $\eta$

$$x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

Nelle figure sotto si vedono due triangoli sui piani $\mu$ ed $\eta$.



**Università di Trento - Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e in Ingegneria Ambientale - 2015/16**

# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 4 foglio di esercizi - 14 marzo 2016

**Rette e piani in $\mathbf{R}^3$. Insiemi generatori. Insiemi linearmente indipendenti. Basi. Intersezione di sottospazi e formula di Grassmann. Spazi vettoriali di funzioni e sottospazi.**

### 4.1 Esercizio intersezione di due piani in $\mathbf{R}^3$

i. Si considerino i piani $\alpha = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$ , $\beta = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0\}$ e si faccia un disegno nel quale siano rappresentati entrambi. Si osservi che $\alpha$ e $\beta$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$ e per ciascuno di essi si trovi una base; si rappresentino poi sul disegno le basi trovate. Ricordiamo che in questa situazione si dice che l'equazione $x_1 - x_2 = 0$ è una equazione cartesiana del piano $\alpha$ e che l'equazione $x_2 - x_3 = 0$ è una equazione cartesiana del piano $\beta$.

ii. Si consideri la retta $r = \alpha \cap \beta$ e la si rappresenti sul disegno fatto in precedenza. Si osservi che un punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbf{R}^3$ appartiene a $r$ se e solo se le tre coordinate soddisfano entrambe le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.1.1}$$

che si dicono *equazioni cartesiane della retta* $r$. Spesso diremo che il sistema di equazioni (4.1.1) è *l'equazione cartesiana* (al singolare) di $r$. Si trovi un punto $P$, diverso dal vettore nullo, che appartenga a entrambi i piani $\alpha$ e $\beta$ e si scriva un'equazione parametrica della retta $r$.

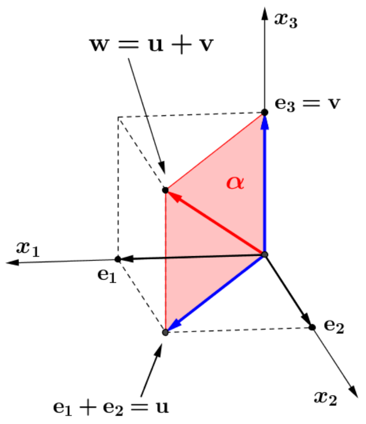
iii. Si determini lo spazio vettoriale $\mu = \alpha + \beta$, ossia il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ generato dall'insieme $\alpha \cup \beta$ e si osservi che vale la formula di Grassmann $\dim \alpha + \dim \beta = \dim r + \dim \mu$ . Si comprenda il significato della formula in relazione al disegno fatto in precedenza.

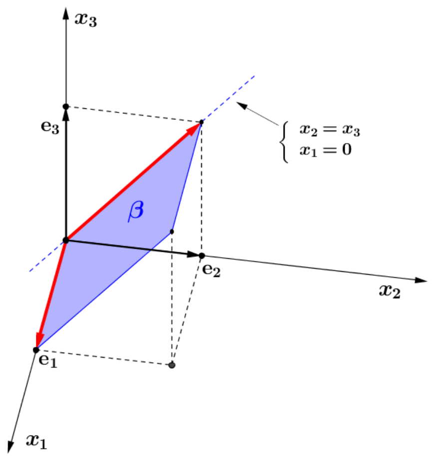
iv. Sommando le equazioni in (4.1.1), si ottiene la nuova equazione $x_1 - x_3 = 0$, che rappresenta un piano $\gamma$. Si osservi che tale piano è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ e si determini una sua base. Si scrivano un'equazione cartesiana e un'equazione parametrica della retta $\eta = \gamma \cap \alpha$ e si mostri che $r = \eta$. Si osservi che in questo modo si sono trovate due diverse equazioni di una stessa retta, ossia: si sono trovati due diversi sistemi di equazioni lineari, i quali hanno lo stesso insieme di soluzioni; in questa situazione si dice che i due sistemi sono *equivalenti*.

v. Si consideri il vettore $Q = (2,2,1)$ e si considerino i piani $\alpha^* = \alpha + Q$ , $\beta^* = \beta + Q$ . Si rappresentino i piani $\alpha^*$ e $\beta^*$ con un disegno e di ciascuno si scriva una equazione cartesiana. Si scriva un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana della retta $\delta = \alpha^* \cap \beta^*$.

**Soluzione**

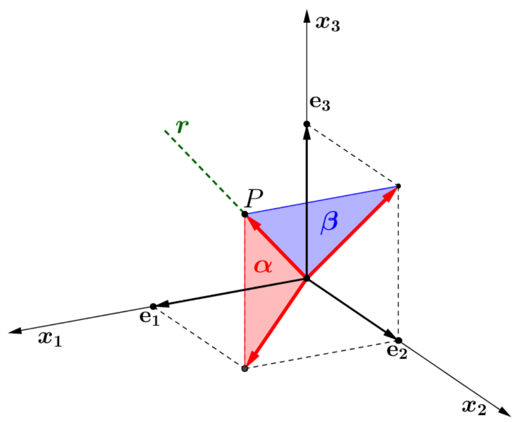
i. Essendo definito come l'insieme in cui si annulla una funzione lineare, è immediato che l'insieme $\alpha$ è un sottospazio vettoriale. Si vede immediatamente che i vettori $\mathbf{u} = (1,1,0) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ e $\mathbf{v} = (0,0,1) = \mathbf{e_3}$ appartengono all'insieme $\alpha$. I vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ non sono allineati, ossia sono linearmente indipendenti, e generano $\alpha$, quindi costituiscono una base di $\alpha$. Una porzione di $\alpha$, e precisamente il parallelogramma che ha come lati $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, è rappresentata nella figura sotto a sinistra. Nella stessa figura è anche rappresentato il punto $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (1,1,1)$, che pure appartiene ad $\alpha$. Si osserva che anche le coppie $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ e $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ sono basi di $\alpha$.

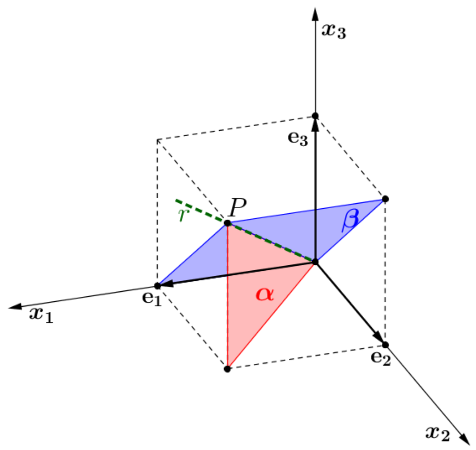



Nella figura a destra si vede invece il parallelogramma che ha come lati i vettori $\mathbf{e_1}$ e $(0,1,1) = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$, i quali evidentemente appartengono entrambi al piano $\beta$ e sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di $\beta$. La somma di tali vettori di base è il punto $\mathbf{w} = (1,1,1)$ che si era già visto nella figura a sinistra. Tale punto, che si vede nella figura a destra, anche se non è esplicitamente indicato, appartiene dunque a entrambi i piani $\alpha$ e $\beta$.

ii. Abbiamo appena visto sopra che il vettore, o punto, $\mathbf{w} = (1,1,1)$ appartiene a entrambi i piani $\alpha$ e $\beta$. Quindi tutti i vettori del tipo $t\mathbf{w}$, ossia tutti i punti della retta generata dal vettore $\mathbf{w}$, appartengono a entrambi i piani; insomma: la retta $r = \alpha \cap \beta$ ha equazione parametrica $t(1,1,1)$. La situazione è rappresentata in entrambe le figure sotto dove il punto $\mathbf{w} = (1,1,1)$ è indicato con la lettera $P$. Nella figura a sinistra sono raffigurati un triangolo nel piano $\alpha$ e un triangolo nel piano $\beta$, mentre nella figura a destra sono raffigurati un triangolo nel piano $\alpha$ e un parallelogramma nel piano $\beta$.



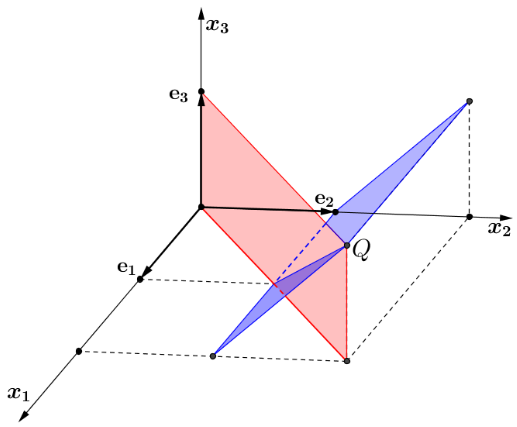

iii. Per mostrare la formula di Grassmann, conviene prendere il vettore $\mathbf{w}$ che è una base di $r = \alpha \cap \beta$; poi si prende l'insieme $A = \{\mathbf{w}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\}$, che è una base di $\alpha$; infine si prende l'insieme $B = \{\mathbf{w}, \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}\}$, che è una base di $\beta$. A questo punto si osserva che l'insieme $A \cup B = \{\mathbf{w}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}\}$ genera $\alpha \cup \beta$, ossia $\alpha + \beta$ ed è linearmente indipendente, quindi è una base di $\alpha + \beta$. Pertanto

$$\dim(\alpha + \beta) = \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) = \dim(\alpha) + \dim(\beta) - \dim(\alpha \cap \beta)$$

Si osservi che si potevano invece prendere le basi $A = \{\mathbf{w}, \mathbf{e_3}\}$ e $B = \{\mathbf{w}, \mathbf{e_1}\}$.
Si osservi che il ragionamento appena fatto, pur se in una situazione semplice, è esattamente lo stesso che si deve fare per dimostrare la formula di Grassmann in generale.

iv. Una base di $\gamma$ è ad esempio $\{\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}\}$; un'altra base è $\{\mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}\}$. Il punto $P = (1,1,1)$ appartiene a $\eta$ e con esso si scrive una equazione parametrica della retta.

v. Il punto $Q = (2,2,1)$ appartiene ad $\alpha$ e quindi si ha $\alpha^* = \alpha$. Il punto $Q$ non appartiene invece a $\beta$ e quindi il piano $\beta^*$ non passa per l'origine. La situazione è rappresentata nella figura a fianco.
Una equazione cartesiana del piano $\alpha$ è $x_1 - x_2 = 0$, che si è usata nella domanda per definirlo. Una equazione cartesiana di $\beta^*$ deve essere del tipo $x_2 - x_3 = k$, e il valore di $k$ si ottiene imponendo che l'equazione sia verificata dalle coordinate del punto $Q$. Pertanto l'equazione cercata di $\beta^*$ è $x_2 - x_3 = 1$.




Infine, una equazione parametrica e una equazione cartesiana della retta $\delta = \alpha^* \cap \beta^*$ sono

$$Q + tP = (2,1,1) + t(1,1,1) \qquad ; \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

## 4.2 Esercizio sottospazi in $\mathbf{R}^4$

i. Si scriva una equazione parametrica della retta $r$ in $\mathbf{R}^4$ che passa per i punti $P_1 = (1,0,2,0)$ e $P_2 = (-1,1,1,0)$. Si scriva poi un'equazione cartesiana della retta $r$, ossia un sistema di equazioni nelle variabili $x_1, x_2, x_3, x_4$ che è soddisfatto da tutti e soli i punti della retta.
ii. Si consideri l'insieme $V = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$, si mostri che è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^4$ e se ne determini una base (ad esempio si espliciti $x_4$ e si osservi che si può trovare del tipo $(1,0,0,a), (0,1,0,b), (0,0,1,c)$).
iii. Si trovi l'intersezione tra la retta $r$ e lo spazio $V$. Sia $U$ il sottospazio uno-dimensionale parallelo a $r$ (ossia che si ottiene traslando opportunamente $r$) e si osservi che vale la formula di Grassmann per $U$ e $V$.
iv. Si considerino i sottospazi $\gamma = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 = 0\}$, $\delta = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - 2x_3 = 0, x_1 + x_3 = 0\}$ e sia $\eta = \gamma \cap \delta$, $\mu = \gamma + \delta$ Si determini una base di ciascuno dei sottospazi $\eta, \gamma, \delta, \mu$ e si verifichi che vale la formula di Grassmann.

**Soluzione**

i. Un'equazione parametrica della retta $r$ è ad esempio

$$P_1 + t(P_2 - P_1) \qquad t \in \mathbf{R}$$

ossia

$$(1,0,2,0) + t(-2,1,-1,0) = (1-2t,\, t,\, 2-t,\, 0) \qquad t \in \mathbf{R} \tag{4.2.1}$$

ossia

$$x_1 = 1 - 2t\,, \quad x_2 = t\,, \quad x_3 = 2 - t\,, \quad x_4 = 0 \qquad t \in \mathbf{R}$$

Per trovare una equazione cartesiana della retta $r$ è sufficiente eliminare il parametro $t$ dalle equazioni qui sopra. Questo si può fare in molti modi; in questo caso è molto comodo semplicemente usare la seconda equazione parametrica e sostituire $x_2$ al posto di $t$ nelle altre equazioni. Si ottiene pertanto il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 \\ x_3 = x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Tale sistema si può interpretare come intersezione di tre sottospazi 3-dimensionali di $\mathbf{R}^4$, ciascuno definito da una delle equazioni. Si noti che le equazioni del sistema sono piuttosto semplici e i sottospazi si possono facilmente visualizzare, se si vuole.

ii. Che $V$ sia un sottospazio si vede nel solito modo, che ormai allo studente è chiaro. Se non fosse chiaro, torni indietro a cercare esercizi analoghi in dimensione tre e due. Seguendo poi il suggerimento indicato nella domanda, cerchiamo una base di $V$ formata da vettori del tipo $(1,0,0,a), (0,1,0,b), (0,0,1,c)$). Deve essere ormai evidente allo studente che tre vettori di questo tipo sono necessariamente indipendenti. Se non fosse chiaro dopo un po' di riflessione, conviene chiedere ai docenti o ai tutor. Poiché i vettori devono appartenere a $V$, le loro coordinate devono verificare l'equazione che definisce $V$, quindi si deve avere $a=-1$, $b=-2$, $c=1$.

iii. Per trovare l'intersezione tra la retta $r$ e lo spazio $V$ è sufficiente cercare un punto di $r$, ossia del tipo (4.2.1), che appartenga a $V$, ossia che verifichi l'equazione $x_1+2x_2-x_3+x_4=0$. Si ottiene pertanto $(1-2t)+2t-(2-t)=0$ da cui $t=1$ e, in conclusione, l'intersezione è il punto $P_1+(P_2-P_1)=P_2=(-1,1,1,0)$.
Infine il sottospazio uno-dimensionale $U$ parallelo a $r$ è generato dal vettore $\mathbf{w}=P_2-P_1=(-2,1,1,0)$, che non appartiene a $V$. Quindi l'intersezione $U\cap V$ è il sottospazio che contiene soltanto il vettore nullo, e dunque ha dimensione zero; invece il sottospazio $U+V$ è uguale a tutto $\mathbf{R}^4$ e si ha quindi $\dim(U+V)=4$. In questa situazione si dice che $\mathbf{R}^4$ è somma diretta dei sottospazi $U$ e $V$ e la formula di Grassman è banalmente verificata.

iv. Il sistema delle due equazioni che definiscono il sottospazio $\gamma$ è equivalente al sistema: $x_1=0$ e $x_2=0$. Quindi una base del sottospazio $\gamma$ è $\mathbf{e_3}=(0,0,1,0)$, $\mathbf{e_4}=(0,0,0,1)$ . In modo analogo si trova che il sottospazio $\delta$ ha come base la coppia $\{\mathbf{e_2},\mathbf{e_4}\}$ . In conclusione, l'intersezione dei due sottospazi è la retta generata da $\mathbf{e_4}$ e ha dimensione uno, mentre la somma è generata da $\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}$ e ha dimensione 3. La formula di Grassmann è chiaramente verificata.

## 4.3 Esercizio **spazi di funzioni**

Sia $A$ un insieme e si denoti con il simbolo $\mathbf{R}^A$ l'insieme delle funzioni definite su $A$ a valori in $\mathbf{R}$. Per ogni coppia $f,g\in\mathbf{R}^A$ si consideri la funzione $f+g$ tale che $(f+g)(a)=f(a)+g(a)\ \forall a\in A$. Per ogni $t\in\mathbf{R}$ si consideri inoltre la funzione $tf$ tale che $(tf)(a)=tf(a)\ \forall a\in A$.
i. Si mostri che con queste operazioni l'insieme $\mathbf{R}^A$ è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.

ii. Sia $A=\mathbf{R}$ e si dica quali dei seguenti sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^A$: $V_1=$ le funzioni continue su $\mathbf{R}$; $V_2=$ le funzioni che in ogni punto sono maggiori di zero; $V_3=$ le funzioni per le quali esiste il limite per $x\to+\infty$; $V_4=$ le funzioni $f$ tali che $f(1)+f(2)=0$; $V_5=$ le funzioni continue tali che l'integrale di $f$ sull'intervallo $[1,3]$ è nullo.
iii. Sia $V$ l'insieme delle funzioni $f(x)$ due volte derivabili su $\mathbf{R}$, tali che $f''(x)+4f(x)=x$. Si dimostri che $V$ è un piano in $\mathbf{R}^\mathbf{R}$ e se ne scriva una equazione parametrica.

### Soluzione

i. Non si riporta la verifica che $\mathbf{R}^A$ è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$, ma si consiglia allo studente di scriverla in dettaglio una (e una sola!) volta nella vita.

- per vedere che l'insieme $V_1$ delle funzioni continue su $\mathbf{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^\mathbf{R}$, è sufficiente verificare che esso è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per una funzione costante. In effetti, come si è visto nel corso di Analisi matematica, queste operazioni producono funzioni continue e pertanto $V_1$ è un sottospazio vettoriale. Si suggerisce allo studente di mostrare che per ogni numero naturale $n$ si può trovare un sottoinsieme di $V_1$ che è linearmente indipendente; questo mostra che lo spazio $V_1$ non ha dimensione finita.

- l'insieme $V_2$ non è un sottospazio vettoriale, infatti non contiene l'elemento neutro, ossia la funzione nulla.

- Se si intende che il limite esiste anche quando vale $+\infty$ oppure $-\infty$, allora l'insieme $V_3$ non è un sottospazio vettoriale, infatti si possono trovare due funzioni, una che ha limite uguale $+\infty$ e un'altra che ha limite uguale a $-\infty$, tali che la somma non ha limite; quindi con questa interpretazione l'insieme non è chiuso rispetto alla somma. Se invece si intendesse che il limite deve essere in $\mathbf{R}$ allora $V_3$ sarebbe chiuso, e quindi un sottospazio, grazie alle proprietà dei limiti.

- Sia $V_4$, sia $V_5$ sono sottospazi vettoriali, poiché ciascuno di essi è l'insieme degli zeri di una funzione lineare. Lo studente rifletta; se non capisce, chieda.

iii. Sia $V_6$ l'insieme delle funzioni due volte derivabili su $\mathbf{R}$. Si sa che la somma di due funzioni derivabili è derivabile e anche il prodotto di una funzione derivabile per una costante è ancora derivabile. Quindi $V_6$ è uno spazio vettoriale. Consideriamo l'equazione differenziale

$$f''(x)+4f(x)=0 \tag{4.3.1}$$

che è lineare, a coefficienti costanti, omogenea e si dice *equazione omogenea associata* all'equazione data inizialmente. Dal corso di Analisi matematica 1, lo studente sa già, ma conviene che ri-dimostri per esercizio, che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea, che denotiamo $U$, è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per una costante, quindi è un sottospazio dello spazio vettoriale $V_6$. Inoltre si verifica immediatamente che le funzioni $\mathbf{w_1} = \cos 2x$ e $\mathbf{w_2} = \sin 2x$ sono soluzioni di (4.3.1), ossia elementi di $U$ e quindi tutte le loro combinazioni lineari

$$a\mathbf{w_1} + b\mathbf{w_2} = a\cos 2x + b\sin 2x \tag{4.3.2}$$

dove $a, b \in \mathbf{R}$, appartengono a $U$. Ci sono altri elementi di $U$ oltre a quelli del tipo (4.3.2)? La risposta è **No**, e segue dal fatto noto che, comunque presi $a, b \in \mathbf{R}$, il problema di Cauchy

$$f''(x) + 4f(x) = 0 \qquad\qquad f(0) = a \qquad f'(0) = b \tag{4.3.3}$$

ha una soluzione unica su **R**, che è precisamente del tipo (4.3.2), con $a = f(0)$, $2b = f'(0)$. Poiché i vettori $\mathbf{w_1} = \cos 2x$, $\mathbf{w_2} = \sin 2x$ sono linearmente indipendenti (lo studente verifichi questa affermazione) segue che la coppia $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ è una base dello spazio $U$ delle soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea.
A questo punto descriviamo lo spazio $V$ delle soluzioni dell'equazione differenziale *non* omogenea. Per far questo, scegliamo a piacere una funzione $v_0$ di $V$, ad esempio la funzione $v_0 = \frac{1}{4}x$, che si trova facilmente cercando fra i polinomi, e osserviamo che si ha $V = U + v_0$ ossia: l'insieme $V$ è un traslato del sottospazio vettoriale 2-dimensionale $U$, quindi è un piano, che ha equazione parametrica $a\cos 2x + b\sin 2x + v_0$ Quanto appena detto si può esprimere come segue: *la soluzione generale di una equazione differenziale lineare non omogenea si ottiene sommando una sua soluzione particolare* (in questo caso $v_0$) *alla soluzione generale della relativa equazione omogenea (in questo caso $a\cos 2x + b\sin 2x$).*

# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 5 foglio di esercizi - 21 marzo 2016

**Matrici colonna e matrici riga; funzioni lineari e matrici. Sistemi lineari e notazione matriciale. Sistemi equivalenti. Interpretazione geometrica**

### 5.1 Esercizio matrici colonna e matrici riga

Siano $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ coppie ordinate di numeri reali e consideriamo le matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \tag{5.1.1}$$

La matrice $A$ ha una colonna e due righe, e in ogni riga si trova un solo elemento; per riferirci a una matrice come questa, che ha solo una colonna, useremo talvolta il termine *matrice colonna* o anche *vettore colonna*. La matrice $B$ ha una riga e due colonne; per riferirci a una matrice come questa, che ha solo una riga, useremo talvolta il termine *matrice riga* o anche *vettore riga*.
Non si devono confondere tra loro la coppia ordinata $a$ e la matrice $A$, anche se i due oggetti contengono la stessa informazione. Analogamente non si devono confondere tra loro la coppia ordinata $b$ e la matrice $B$.
Ricordiamo che la matrice trasposta di $A$ è la matrice riga $A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, mentre la matrice trasposta di $B$ è la matrice colonna $B^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. In modo del tutto analogo si possono considerare matrici colonna o matrici riga che hanno $n$ elementi.

i. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.1.2}$$

Si calcolino le seguenti espressioni nell'algebra delle matrici, quando sono possibili:

$$AB \qquad AB^T \qquad CA \qquad AC \qquad A^TA \qquad AA^T \tag{5.1.3}$$

$$(AC)A - A(CA) \qquad A^TD^T - (DA)^T \qquad (AD)^T - D^TA^T \tag{5.1.4}$$

**Soluzione**

Affinché sia definito il prodotto di due matrici $AB$, si deve avere che il numero di colonne della matrice di sinistra $A$, deve essere uguale al numero di righe della matrice di destra $B$.
Nel nostro caso la matrice $A$ ha una colonna e la matrice $B$ ha due righe, dunque il prodotto $AB$ non è definito.

$$AB^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; \qquad CA = \begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 \end{bmatrix}; \qquad AC = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 14 \\ 15 & -21 \end{bmatrix};$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}; \qquad AA^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix};$$

$$(AC)A - A(CA) = \begin{bmatrix} -10 & 14 \\ 15 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ -93 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 62 \\ -93 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

*Il risultato si può ottenere immediatamente dalla proprietà associativa anche senza svolgere i calcoli.*

$$A^TD^T - (DA)^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^T = 10 - 10 = 0;$$

$$(AD)^T - D^TA^T = \left( \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \right)^T - \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \right)^T - \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Nelle due righe precedenti si trovano due esempi della formula $(LM)^T = M^T L^T$ che vale per qualunque coppia di matrici $L$, $M$ di cui si può fare il prodotto.*

## 5.2 Esercizio **funzioni lineari a valori reali e matrici**

Sia data la coppia di numeri reali $(a_1, a_2) = (5, -3)$ e si consideri la funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 5x_1 - 3x_2 \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \tag{5.2.1}$$

Si osservi che l'espressione che si trova in (5.2.1) per il calcolo del valore $f(x)$ si può scrivere anche come prodotto di matrici

$$f(x) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5.2.2}$$

Questa è in effetti la ragione principale per cui si utilizzano le matrici e si è definito il prodotto di matrici in quel modo. Nella situazione (5.2.2), si dice che *la matrice riga* $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ *rappresenta la funzione lineare* $f$*, rispetto alla base standard in* $\mathbf{R}^2$. Quanto si è appena detto si estende banalmente alle funzioni lineari definite su $\mathbf{R}^n$ e a valori in $\mathbf{R}$. Nel seguito del corso si vedrà inoltre che tutti gli operatori lineari fra spazi vettoriali di dimensione finita si possono rappresentare con una matrice, in tanti modi diversi che dipendono dalla scelta delle basi negli spazi in questione.

i. Si consideri la funzione lineare $g(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$, definita su $\mathbf{R}^3$, e si scriva la matrice che rappresenta $g$ rispetto al sistema di riferimento standard in $\mathbf{R}^3$.
ii. Si consideri la funzione lineare $h(x) = x_1 - x_2$ definita su $\mathbf{R}^5$ e si scriva la matrice che rappresenta $h$ rispetto al sistema di riferimento standard in $\mathbf{R}^5$.
iii. Si considerino le funzioni lineari $\varphi_1(x) = x_1$, $\varphi_2(x) = x_2$ e $\varphi_3(x) = x_3$ definite su $\mathbf{R}^3$, e si scrivano le matrici che le rappresentano rispetto al sistema di riferimento standard.
iv. Si osservi che, comunque presi due vettori $x, y \in \mathbf{R}^n$, il prodotto scalare standard di $x$ per $y$ si può scrivere: $x \cdot y = X^T Y = Y^T X$.
v. Si determinino tutte le funzioni lineari $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tali che: $f(t,t) = 0 \ \forall t \in \mathbf{R}$ e inoltre $f(2,1) = 3$. Si interpreti geometricamente il problema.

**Soluzione**

i. Si può scrivere la funzione $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ come prodotto di matrici, cioè $g(x) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Quindi la matrice che rappresenta $g$ rispetto alla base standard di $\mathbf{R}^3$ è la matrice riga $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

ii. In questo caso la funzione $h\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}$ si può scrivere come $h(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$.

Quindi la matrice che rappresenta $h$ rispetto alla base standard di $\mathbf{R}^5$ è la matrice riga $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

iii. Le matrici riga che rappresentano tali funzioni sono rispettivamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

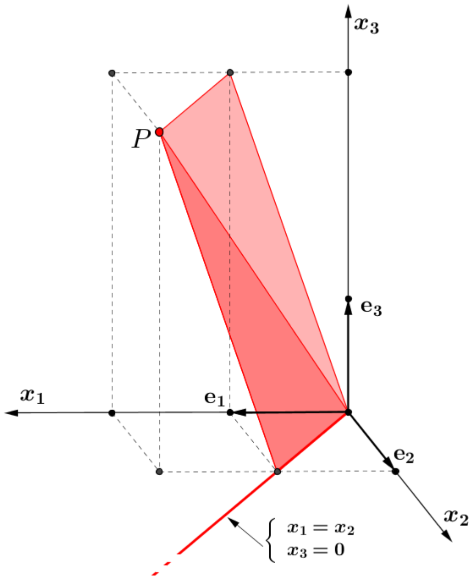
si tratta della proiezione rispettivamente sulla prima, sulla seconda e sulla terza coordinata.

iv. La risposta è ovvia. Basta ricordare, per esempio, che se $x = (x_1, x_2, x_3)$ allora $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e poi scrivere esplicitamente quanto richiesto.

v. Una funzione lineare $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è del tipo $f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ con $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$.
Da $f(t,t) = 0 \ \forall t \in \mathbf{R}$ ricaviamo che $a_1 t + a_2 t = 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$. Se vale per ogni $t \in \mathbf{R}$ vale anche per $t = 1$, e dunque sostituendo si ottiene che $a_1 + a_2 = 0$. Da $f(2,1) = 3$ abbiamo invece che $2a_1 + a_2 = 3$.
Pertanto per determinare la funzione lineare $f$ dobbiamo risolvere un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 3 \end{cases}$$

Da cui si ottiene $a_1 = 3$ e $a_2 = -3$ . Pertanto $f(x) = 3x_1 - 3x_2$ .
Per interpretare geometricamente il problema si disegna il grafico di $f$, $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | f(x_1, x_2) = x_3\}$ come in figura. Si tratta di un piano che interseca il piano $\{x_3 = 0\}$ lungo la retta (del piano) $x_1 = x_2$ e passa per il punto $P = (2, 1, 3)$ . Detto in altre parole, il grafico di $f$ è il piano generato dai vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ oppure, dai vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, 3)$ .




## 5.3 Esercizio equazioni lineari

### 5.3.1 Equazioni lineari

Una equazione lineare in $n$ incognite è una equazione del tipo

$$f(\mathbf{x}) = k \tag{5.3.1}$$

dove $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una funzione lineare, $k$ è noto e $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ è un vettore incognito. Ad esempio ecco qui sotto una equazione lineare

$$4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 7 \tag{5.3.2}$$

che è appunto del tipo (5.3.1) se si prende $n = 3$, $f(x) = 4x_1 - 5x_2 + 8x_3$ e $k = 7$. In questa equazione il numero 7 è il *termine noto*, i numeri $4, -5, 8$, che determinano l'equazione, si dicono *coefficienti* e $x_1, x_2, x_3$ sono le *incognite*. *Risolvere l'equazione* vuol dire trovare tutte le terne $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ di numeri reali per le quali è vera l'uguaglianza (5.3.2), ossia vuol dire determinare e descrivere l'insieme delle soluzioni

$$U = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; f(\mathbf{x}) = k\right\} \tag{5.3.3}$$

Consideriamo ora l'equazione

$$4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \tag{5.3.4}$$

dove si è preso il termine noto uguale a zero (una tale equazione si dice *omogenea*). È immediato (e lo abbiamo già visto nei fogli precedenti) che l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea (5.3.4) è un sottospazio vettoriale $V$ di $\mathbf{R}^3$, il quale ha dimensione 2 se l'equazione ha almeno un coefficiente non nullo. Un modo per descrivere $V$ è individuare una sua base $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ e scrivere l'equazione parametrica di $V$, ossia $V = \{t\mathbf{u} + s\mathbf{w}\}$ dove $t, s$ sono parametri che variano in $\mathbf{R}$. Se invece si vuole risolvere l'equazione non omogenea (5.3.2), un modo per descrivere l'insieme $U$ delle soluzioni è dire che gli elementi di $U$ sono tutti e soli i vettori $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ del tipo $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{y}$, dove $\mathbf{v}$ è un elemento qualsiasi di $V$ (il lettore comprenda bene questa affermazione, che si è già vista nei fogli di esercizi precedenti). In altri termini si ha $U = V + \mathbf{y}$, ossia l'insieme $U$ è il piano in $\mathbf{R}^3$ che si ottiene traslando $V$ con un (qualsiasi) vettore $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ che sia soluzione dell'equazione non omogenea (5.3.2).
In generale, l'insieme delle soluzioni dell'equazione (5.3.1), purché la funzione $f$ non sia identicamente nulla, è un piano $(n-1)$-dimensionale in $\mathbf{R}^n$; se l'equazione è omogenea il piano contiene il vettore nullo ed è quindi un sottospazio vettoriale. Il fatto che le soluzioni dell'equazione (5.3.1) dipendano da $n-1$ parametri, ciascuno che

varia in **R**, viene talvolta espresso scrivendo che l'equazione ha $\infty^{n-1}$ soluzioni, ma è un modo di dire poco preciso che forse sarebbe meglio abbandonare.

i. Si scriva una descrizione (equazione) parametrica del piano $U$ delle soluzioni dell'equazione (5.3.2), ossia una descrizione del tipo $\{\mathbf{y}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}\}$

ii. Si consideri di nuovo l'equazione (5.3.2), ma si pensi che la funzione $f$ sia definita su $\mathbf{R}^5$, e però indipendente dalle variabili $x_4$ e $x_5$. Si descriva il 4-piano $U$ delle soluzioni in questo caso.

iii. Si trovi una base dello spazio delle soluzioni della seguente equazione lineare in 6 incognite

$$x_1+x_2+x_3=x_4+x_5+x_6$$

**Soluzione**

i. Lo spazio $U$ è formato dalle soluzioni dell'equazione $4x_1-5x_2+8x_3=7$. In questa equazione si possono prendere libere due delle tre variabili $x_1,x_2,x_3$. Scegliamo ad esempio $x_1=t$ e $x_2=s$ e otteniamo che

$$x_3=\frac{7}{8}-\frac{1}{2}t+\frac{5}{8}s.$$

Dunque gli elementi di $U$ sono le terne del tipo

$$\left(t,s,\frac{7}{8}-\frac{1}{2}t+\frac{5}{8}s\right)=\left(0,0,\frac{7}{8}\right)+\left(t,0,-\frac{1}{2}t\right)+\left(0,s,\frac{5}{8}s\right)=\underbrace{\left(0,0,\frac{7}{8}\right)}_{\mathbf{y}}+t\underbrace{\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)}_{\mathbf{u}}+s\underbrace{\left(0,1,\frac{5}{8}\right)}_{\mathbf{v}}.$$

Geometricamente possiamo pensare l'insieme $U$ come il grafico della funzione $g(x_1,x_2)=\frac{7}{8}-\frac{1}{2}x_1+\frac{5}{8}x_2$ , ossia

$$U=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3\middle| x_3=g(x_1,x_2)\right\}$$

ii. Si ha $U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbf{R}^5|4x_1-5x_2+8x_3=7\}=\left\{(x_1,x_2,g(x_1,x_2),x_4,x_5)\in\mathbf{R}^3\right\}$dove $g$ è la funzione introdotta al punto precedente. Notiamo che anche $x_4$ e $x_5$ sono variabili libere e dunque una scrittura parametrica di $U$ risulta essere

$$U=\underbrace{\left(0,0,\frac{7}{8},0,0\right)}_{\mathbf{y}}+t\underbrace{\left(1,0,-\frac{1}{2},0,0\right)}_{\mathbf{u}}+s\underbrace{\left(0,1,\frac{5}{8},0,0\right)}_{\mathbf{v}}+x_4(0,0,0,1,0)+x_5(0,0,0,0,1)$$

iii. Riscriviamo l'equazione portando tutte le variabili a sinistra e notiamo che in tale equazione si possono prendere libere 5 variabili:

$$\underbrace{x_1+x_2+x_3-x_4-x_5}_{\text{variabili libere}}-x_6=0$$

Dunque lo spazio delle soluzioni di tale equazione sarà dato dalle sestuple del tipo $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_1+x_2+x_3-x_4-x_5)$ cioè l'insieme delle soluzioni è costituito dai punti di $\mathbf{R}^6$ del tipo:

$$x_1(1,0,0,0,0,1)+x_2(0,1,0,0,0,1)+x_3(0,0,1,0,0,1)+x_4(0,0,0,1,0,-1)+x_5(0,0,0,0,1,-1)\qquad x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\mathbf{R}$$

Pertanto lo spazio delle soluzioni è generato dai vettori

$$(1,0,0,0,0,1)\qquad(0,1,0,0,0,1)\qquad(0,0,1,0,0,1)\qquad(0,0,0,1,0,-1)\qquad(0,0,0,0,1,-1)$$

che si scopre facilmente essere linearmente indipendenti e quindi essi costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni.

## 5.4 Esercizio sistemi di due equazioni lineari in due incognite e notazione matriciale

Siano $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{12})$ e $\mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{22})$ due coppie ordinate di numeri reali e consideriamo le funzioni lineari $f_1$ e $f_2$, da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$, definite come segue

$$f_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \qquad f_2(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \tag{5.4.1}$$

Sia $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ una coppia ordinata di numeri reali. L'insieme delle due equazioni lineari

$$\begin{cases} f_1(x) &= b_1 \\ f_2(x) &= b_2 \end{cases} \tag{5.4.2}$$

ossia

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{5.4.3}$$

si dice *sistema* di due equazioni lineari in due incognite.

Il vettore $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ si dice *termine noto* del sistema e la matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ si dice *matrice dei coefficienti*.

Le variabili $x_1, x_2$ sono le incognite. Risolvere il sistema vuol dire trovare tutte le coppie $x = (x_1, x_2)$ che verificano entrambe le equazioni del sistema.

i. Si considerino i vettori colonna $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e si osservi che il sistema di equazioni (5.4.3) è la stessa cosa dell'equazione vettoriale

$$AX = B \tag{5.4.4}$$

che è una *notazione matriciale* per il sistema. La notazione matriciale consente di scrivere in modo compatto i sistemi lineari, anche con un numero molto grande di equazioni e di incognite, e permette di trattare i sistemi con le tecniche dell'algebra delle matrici. Nel contempo, l'interpretazione geometrica fornisce un linguaggio e una visualizzazione per parlare degli oggetti in modo intuitivo.

ii. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \tag{5.4.5}$$

si trovi una sua soluzione e si osservi che in effetti c'è solo quella soluzione. Si interpreti ciascuna delle equazioni del sistema come l'equazione di una retta e si interpreti geometricamente la soluzione del sistema. Si scriva infine il sistema (5.4.5) in forma matriciale.

iii. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ -6x_1 + 9x_2 = -12 \end{cases} \tag{5.4.6}$$

e si determini l'insieme delle sue soluzioni. Si interpreti ciascuna delle equazioni del sistema come l'equazione di una retta e si interpreti geometricamente la soluzione.

v. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ -6x_1 + 9x_2 = 8 \end{cases} \tag{5.4.7}$$

e si determini l'insieme delle sue soluzioni. Si interpreti ciascuna delle equazioni del sistema come l'equazione di una retta e si interpreti geometricamente la soluzione.

**Soluzione**

i. ovvio, basterà scrivere esplicitamente il prodotto di matrici $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

ii. Proviamo a manipolare opportunamente le equazioni del sistema 5.4.5 . Osserviamo che

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \underset{(1)}{\iff} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

L'equivalenza (1) significa che il sistema iniziale e quello ottenuto sostituendo la seconda equazione con lei stessa moltiplicata per 2 hanno lo stesso insieme delle soluzioni. In altre parole:

- $$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & -1 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & -2 \end{cases}$$

  cioè comunque presa una coppia $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ che verifica entrambe le equazioni del sistema a sinistra, allora questa verifica anche le equazioni del sistema a destra. Infatti se una coppia $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ verifica sia la prima che la seconda equazione del sistema a sinistra si ha che
  - verificando la prima equazione, banalmente segue che verifica la prima equazione del sistema sulla destra;
  - verificando la seconda equazione, verifica anche l'equazione stessa moltiplicata per un coefficiente $2$.

- $$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & -2 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & -1 \end{cases}$$

  significa che comunque presa una coppia $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ che verifica entrambe le equazioni del sistema a sinistra allora tale coppia verifica anche le equazioni del sistema a destra. Infatti se una coppia $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ verifica entrambe le equazioni del sistema a sinistra allora
  - verificandone la prima equazione banalmente verifica anche la prima equazione del sistema sulla destra
  - verificandone la seconda equazione, verifica anche la medesima equazione moltiplicata per un coefficiente uguale a $\frac{1}{2}$

Allo stesso modo saranno equivalenti anche i sistemi

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & = & -2 \end{cases} \underset{(2)}{\iff} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ [3x_1 + 2x_2] + [2x_1 - 2x_2] & = & 1 - 2 \end{cases}$$

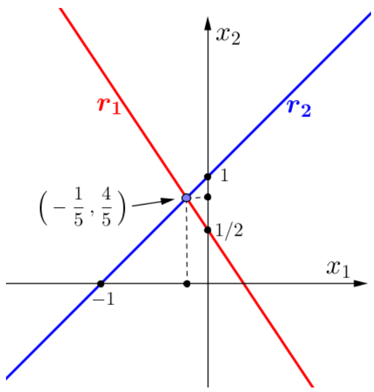
dove il sistema a destra è stato ottenuto da quello di sinistra sostituendo la seconda equazione con la somma della prima e della seconda equazione. Ricordiamo ancora che l'equivalenza dei due sistemi significa che le coppie di punti $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano entrambe le equazioni del sistema a sinistra soddisfano anche entrambe le equazioni del sistema sulla destra e viceversa. Detto brevemente, i due sistemi hanno lo stesso insieme delle soluzioni.
Dunque il nostro sistema di partenza sarà equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_2 & = & \frac{4}{5} \\ x_1 & = & -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Cerchiamo ora di dare un'*interpretazione geometrica* del sistema lineare appena visto. Siano

- $r_1$ la retta costituita dai punti $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $3x_1 + 2x_2 = 1$. [1]
- $r_2$ la retta costituita dai punti $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $x_1 - x_2 = -1$

Pertanto l'insieme delle soluzioni del sistema 5.4.5 è $r_1 \cap r_2$. Nell'immagine che segue è rappresentato il grafico delle rette $r_1$ ed $r_2$ e il loro insieme intersezione $r_1 \cap r_2 = \{(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5})\}$.




Una seconda interpretazione possibile del sistema 5.4.5 è un'*interpretazione vettoriale* . Come già osservato al punto i. , il sistema di equazioni 5.4.5 è la stessa cosa dell'equazione vettoriale $AX = B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}$$

[1] ATTENZIONE! è sbagliato dire che "$3x_1 + 2x_2 = 1$ è una retta"

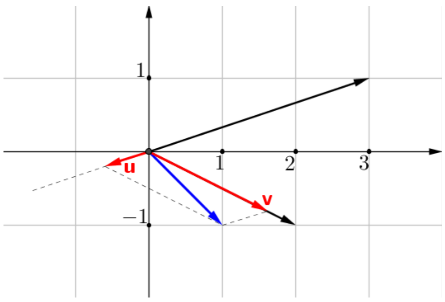
cioè

$$\begin{bmatrix} 3x_1+2x_2 \\ x_1-x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pertanto risolvere il sistema 5.4.5 può essere interpretato come trovare i valori di $x_1$ e $x_2$ per cui la combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ che ha rispettivamente $x_1$ e $x_2$ come coefficienti sia uguale al vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

In altre parole vogliamo scrivere il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ quindi decomponiamo $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ nelle direzioni dei vettori $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Quanto detto è rappresentato nella figura sulla destra.




Il vettore $\mathbf{u} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ sarà la componente di $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ nella direzione del vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$;

mentre vettore $\mathbf{v} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ sarà la componente del vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ nella direzione di $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.[a]

[a]Si osservi che le rette che hanno per direzioni i vettori $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ sono ortogonali rispettivamente alle rette $r_1$ e $r_2$.

## 5.5 Esercizio sistemi e matrici triangolari

Utilizziamo le notazioni dell'esercizio precedente e consideriamo un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \qquad\quad\;\; a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{5.5.1}$$

che si scrive nella forma matriciale $AX = B$, dove la matrice $A$ è del tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \tag{5.5.2}$$

che si dice *triangolare superiore*. Considerazioni analoghe si possono fare per i sistemi *triangolari inferiori*.

i. Nell'ipotesi che $a_{11}$ e $a_{22}$ siano entrambi diversi da zero, si mostri che per ogni vettore $b = (b_1, b_2)$ esiste una (ed unica) soluzione del sistema (5.5.1), e si scriva la soluzione $x = (x_1, x_2)$ in termini dei coefficienti e dei termini noti.

ii. Si riscrivano le formule trovate nel punto i. esprimendo il vettore colonna $X$ soluzione del sistema nella forma

$$X = GB \tag{5.5.3}$$

dove $G$ è una opportuna matrice quadrata.

iii. Si osservi che la matrice $G$ è triangolare superiore e che vale $GA = AG = I$. La matrice $G$ è quindi la matrice inversa di $A$, ossia $G = A^{-1}$. Si osservi che utilizzando le operazioni fra matrici si ha

$$AX = B \quad \Longrightarrow \quad A^{-1}AX = GB \quad \Longrightarrow \quad X = GB \tag{5.5.4}$$

**Soluzione**

i. Consideriamo la seconda equazione del sistema (5.5.1). Dato che $a_{22} \neq 0$ per ipotesi, allora possiamo dividere tale equazione per $a_{22}$ e otteniamo che $x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}}$.

Considerando ora la prima equazione del sistema (5.5.1). Possiamo dividere a destra e a sinistra dell'uguale per $a_{11}$, poiché per ipotesi esso è un valore reale diverso da zero, e otteniamo: $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - x_2 \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$

Pertanto il sistema (5.5.1) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{b_1}{a_{11}} - x_2\dfrac{a_{12}}{a_{11}} \\ x_2 &= \dfrac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ha

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}a_{22}}b_2 \\ x_2 &= \dfrac{b_2}{a_{22}} \end{cases} \tag{5.5.5}$$

Quindi abbiamo trovato esplicitamente l'unica soluzione del sistema.

ii. Sriviamo in forma matriciale del tipo $X = GB$ il sistema (5.5.5):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}a_{22}} \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

dove $G = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}a_{22}} \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} \end{bmatrix}$.

iii. Verifichiamo che vale $GA = AG = I$:

$$GA = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}a_{22}} \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{11}}{a_{11}} & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{22}} \\ 0 & \dfrac{a_{22}}{a_{22}} \end{bmatrix} = I$$

$$AG = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}a_{22}} \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{11}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{12}a_{11}}{a_{11}a_{22}} + \dfrac{a_{12}}{a_{22}} \\ 0 & \dfrac{a_{22}}{a_{22}} \end{bmatrix} = I$$

Pertanto $G$ è la matrice inversa di $A$, cioè $G = A^{-1}$.

## 5.6 Esercizio **discussione generale di un sistema lineare di due equazioni in due incognite**

Utilizziamo la notazione dell'esercizio 5.4 e consideriamo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{5.6.1}$$

In questo esercizio guideremo lo studente a discutere la risolubilità del sistema, nell'ipotesi che le coppie di coefficienti $(a_{11}, a_{12})$ e $(a_{21}, a_{22})$ siano entrambe diverse dal vettore nullo.

i. **Primo caso:** supponiamo che si abbia

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \tag{5.6.2}$$

In questo caso, per ogni termine noto **b**, si risolva il sistema nel modo che si preferisce e si osservi che esiste una ed una sola soluzione $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$. Si esprimano $x_1, x_2$ in termini dei coefficienti e del termine noto e si osservi che per poter scrivere tali espressioni è necessario che sia vera la condizione algebrica (5.6.2). Poiché il numero $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ determina la risolubilità del sistema, lo si chiama *determinante* del sistema o anche determinante della matrice dei coefficienti.
Si osservi che ogni equazione del sistema si può interpretare geometricamente come l'equazione di una retta e la soluzione del sistema è l'intersezione delle due rette. Si osservi che la condizione (5.6.2) è equivalente a dire che i due vettori $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{12})$, $\mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{22})$ sono linearmente indipendenti, ossia che le rette non sono parallele, pertanto si intersecano in un punto.

ii. **Secondo caso:** supponiamo che si abbia

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{5.6.3}$$

In questo caso i vettori $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{12})$, $\mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{22})$ sono linearmente dipendenti. Poiché abbiamo assunto che i due vettori $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ siano non nulli, ciascuna delle equazioni rappresenta una retta e le due rette sono parallele. A questo punto ci sono due possibilità: sono la stessa retta, e allora proprio tale retta è l'insieme delle soluzioni, oppure sono due rette distinte, e allora l'insieme delle soluzioni è vuoto.
Lasciamo al lettore la discussione dei casi in cui uno o entrambi i vettori $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}$ sono nulli.

**Soluzione**

i. Decidiamo, per esempio, di ricavare $x_1$ dalla prima equazione. Teniamo presente che l'unica informazione di cui disponiamo è che $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ pertanto cercheremo di manipolare opportunamente le nostre equazioni al fine di ottenere il valore $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ come coefficiente dell'incognita $x_1$ e poter dunque dividere per tale valore. A tal proposito si moltiplica per $a_{22}$ la prima equazione e ad essa si sottrae la seconda moltiplicata per $a_{12}$. Allo stesso modo possiamo isolare $x_2$ dalla seconda equazione sostituendo a questa la prima equazione moltiplicata per $a_{21}$ e sottraendole la seconda moltiplicata per $a_{11}$.

Quanto detto possiamo vederlo nelle sequenti equivalenze di sistemi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \boxed{a_{22}f_1(x) - a_{12}f_2(x)} \to \\ \boxed{a_{21}f_1(x) - a_{11}f_2(x)} \to \end{array} \begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 - a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ a_{21}a_{11}x_1 - a_{11}a_{21}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 - a_{11}a_{22}x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 - a_{12}a_{21}x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ a_{21}a_{12}x_2 - a_{11}a_{22}x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

Si osservi che le moltiplicazioni effettuate non provocano perdita di informazioni. Infatti anche nel caso in cui, per esempio $a_{22} = 0$ e quindi moltiplicassimo per un coefficiente nullo, la condizione $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ci dice che sicuramente $a_{12}, a_{21} \neq 0$, e dunque stiamo conservando tutte le informazioni sia della prima che della seconda equazione.

ii. Discutiamo il caso in cui il vettore $\mathbf{a_1}$ sia il vettore nullo $\mathbf{0} = (0,0)$. A questo punto la prima equazione è $0 = b_1$, se questa è vera allora l'insieme delle soluzioni è la retta rappresentata dalla seconda equazione. Nel caso in cui $0 = b_1$ sia falsa allora l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto.

Nel caso in cui entrambi i vettori $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$ siano nulli allora l'insime delle soluzioni è $\mathbf{R}^2$ nel caso in cui il vettore termine noto $B$ sia nullo altrimenti l'insieme delle soluzioni del sistema è l'insieme vuoto.

## 5.7 Esercizio **combinazioni lineari di equazioni lineari - riduzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite a un sistema triangolare equivalente**

i. Si consideri l'equazione

$$4x_1 + x_2 = 0 \tag{5.7.1}$$

ottenuta sommando le due equazioni del sistema (5.4.5). Si consideri poi il nuovo sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \tag{5.7.2}$$

ottenuto sostituendo la seconda equazione di (5.4.5) con la (5.7.1). Si mostri che il nuovo sistema (5.7.2) è equivalente al precedente sistema (5.4.5), ossia i due sistemi hanno le stesse soluzioni, ossia ogni soluzione del primo è soluzione del secondo e viceversa.

ii. Siano $c_1$ e $c_2$ numeri reali con $c_2 \neq 0$ e si consideri l'equazione

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 b_1 + c_2 b_2 \tag{5.7.3}$$

che si ottiene moltiplicando la prima equazione per $c_1$ e la seconda equazione per $c_2$ e poi sommando: si dice che si è fatta la *combinazione lineare* delle equazioni del sistema (5.4.2) con coefficienti $c_1$ e $c_2$. È evidente che se $x=(x_1,x_2)$ è una soluzione di entrambe le equazioni del sistema, allora è anche soluzione di (5.7.3). Si mostri che il sistema

$$\begin{cases} f_1(x) &= b_1 \\ c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x) &= c_1 b_1 + c_2 b_2 \end{cases} \tag{5.7.4}$$

è equivalente al sistema (5.4.2) [può essere utile fare in primo luogo la dimostrazione nel caso particolare del sistema (5.4.5)]. Dove si usa l'ipotesi che $c_2 \neq 0$? Qual è il significato di questa ipotesi?

iii. Si metta il sistema (5.4.2) nella forma matriciale $AX=B$, scrivendo esplicitamente $A$ e $B$. Si metta anche il sistema (5.7.4) nella forma matriciale $MX=D$ e si trovi una matrice quadrata $C$, nella quale siano opportunamente disposti i coefficienti $c_1, c_2$, tale che $M=CA$ e $D=CB$.

Si osservi infine che, nell'ipotesi che $a_{11} \neq 0$, si può trovare la matrice $C$ del tipo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & 1 \end{bmatrix}$ e fare in modo anche che la matrice $M$ sia triangolare superiore. Determinare $c_1$.

**Soluzione**

i. Vogliamo dimostrare la seguente equivalenza di sistemi:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supponiamo che $(x_1,x_2)$ sia una soluzione del sistema a sinistra, pertanto è soluzione della prima equazione del sistema a sinistra e dunque è soluzione anche della prima equazione del sistema a destra (notare che le due equazioni sono identiche). Inoltre la coppia $(x_1,x_2)$, che per ipotesi è soluzione di entrambe le equazioni del sistema a sinistra, allora è soluzione anche della loro somma e dunque è soluzione della seconda equazione del sistema a destra.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supponiamo che $(x_1,x_2)$ sia una soluzione del sistema a destra; allora, in particolare, tale coppia è soluzione della prima equazione e dunque sarà soluzione anche della prima equazione del sistema a sinistra dal momento che le due equazioni coincidono. Resta da mostrare che la coppia $(x_1,x_2)$ è soluzione anche della seconda equazione del sistema a sinistra. Dire che la coppia $(x_1,x_2)$ risolve il sistema a destra significa che risolve entrambe le equazioni di tale sistema e dunque sarà soluzione anche della loro differenza, in particolare dell'equazione ottenuta sottraendo la prima alla seconda.

ii. Vogliamo dimostrare la seguente equivalenza di sistemi

$$\begin{cases} f_1(x) = b_1 \\ f_2(x) = b_2 \end{cases} \iff \begin{cases} f_1(x) &= b_1 \\ c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x) &= c_1 b_1 + c_2 b_2 \end{cases}$$

cioè vogliamo dimostrare che i due sistemi hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sia $\overline{x}=(\overline{x_1},\overline{x_2})$ una soluzione del sistema a sinistra, cioè $f_1(\overline{x})=b_1$ e $f_2(\overline{x})=b_2$. Allora $\overline{x}$ è ovviamente soluzione della prima equazione del sistema a destra , inoltre da $f_1(\overline{x})=b_1$ segue che $c_1 f_1(\overline{x})=c_1 b_1$ e da $f_2(\overline{x})=b_2$ segue che $c_2 f_2(\overline{x})=c_2 b_2$. Allora si ha anche che $c_1 f_1(\overline{x})+c_2 f_2(\overline{x})=c_1 b_1+c_2 b_2$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sia $\hat{x}=(\hat{x_1},\hat{x_2})$ soluzione del sistema a destra, allora $f_1(\hat{x})=b_1$ e dunque $\hat{x}$ è ovviamente soluzione anche della prima equazione del sistema a sinistra. resta da verificare che $f_2(\hat{x})=b_2$. Tuttavia sappiamo che $c_1 f_1(\hat{x})+c_2 f_2(\hat{x})=c_1 b_1+c_2 b_2$ dunque $c_2 f_2(\hat{x})=c_1 b_1 - c_1 f_1(\hat{x})+c_2 b_2$ e pertanto si ha che

$$c_2 f_2(\hat{x}) = c_1 \underbrace{(b_1 - f_1(\hat{x}))}_{0} + c_2 b_2 .$$

Infine sfruttiamo l'ipotesi $c_2 \neq 0$ e dividendo per $c_2$ si ottiene $f_2(\hat{x})=b_2$. L'ipotesi $c_2 \neq 0$ ci permette di non perdere le informazioni contenute nell'equazione $f_2(x)=b_2$ quando andiamo a sostituirla con una combinazione lineare di se stessa e della prima equazione.

iii. Il sistema (5.4.2) nella forma matriciale $AX=B$ risulta essere

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B}$$

Il sistema (5.7.4) nella forma matriciale $MX = D$ è invece

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_1a_{11}+c_2a_{21} & c_1a_{12}+c_2a_{22} \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ c_1b_1+c_2b_2 \end{bmatrix}}_{D}$$

Per trovare una matrice quadrata $C = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix}$, tale che $D = CB$, risolviamo la seguente equazione matriciale

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ c_1b_1+c_2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1b_1+c_2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} db_1+eb_2 \\ fb_1+gb_2 \end{bmatrix} \iff C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo ora che la matrice $C$ trovata soddisfa $M = CA$:

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_1a_{11}+c_2a_{21} & c_1a_{12}+c_2a_{22} \end{bmatrix} = M$$

Supponiamo ora che $a_{11} \neq 0$ allora possiamo prendere $c_2 = 1$ e $c_1 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$, dunque si ha

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{bmatrix}$$

## 5.8 Esercizio sistemi di due equazioni lineari in tre incognite

Siano $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ e $\mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ due terne ordinate di numeri reali e consideriamo le funzioni lineari $f_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ e $f_2(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$, definite su $\mathbf{R}^3$.

Sia $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ una coppia ordinata di numeri reali. L'insieme delle due equazioni lineari $\begin{cases} f_1(x) = b_1 \\ f_2(x) = b_2 \end{cases}$ si dice *sistema* di due equazioni lineari in tre incognite.

La coppia $(b_1, b_2)$ si dice *termine noto* del sistema e la matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ si dice *matrice dei coefficienti*.

Le variabili $x_1, x_2, x_3$ sono le incognite. Risolvere il sistema vuol dire trovare tutte le terne $x = (x_1, x_2, x_3)$ che verificano entrambe le equazioni del sistema.

i. Si consideri il caso particolare del sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{5.8.1}$$

si descriva algebricamente e si interpreti geometricamente l'insieme delle soluzioni del sistema.

ii. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{5.8.2}$$

si descriva algebricamente e si interpreti geometricamente l'insieme delle soluzioni del sistema.

iii. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -\dfrac{1}{2} \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{5.8.3}$$

si descriva algebricamente e si interpreti geometricamente l'insieme delle soluzioni del sistema.

**Soluzione**

i. Notiamo che in questo caso il termine $a_{11} = 3 \neq 0$ pertanto possiamo ottenere un sistema equivalente a quello dato sostituendo la seconda equazione con una combinazione lineare del tipo:

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}} f_1(x) + f_2(x) = -\frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 + b_2$$

dove nel nostro caso $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}} = -\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \boxed{-\tfrac{1}{3}f_1(x) + f_2(x)} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \quad - \frac{7}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Ora poniamo nella seconda equazione $x_3 = t$ parametro libero, pertanto si ha

$$\begin{cases} 3x_1 = 1 + t - \dfrac{1}{7} - \dfrac{2}{7}t \\ x_2 = \dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{7}t \end{cases}$$

Dunque si ottiene $x_1 = \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{21}t$ e $x_2 = \dfrac{1+2t}{7}$ e l'insieme S delle soluzioni è

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, x_1 = \frac{2}{7} + \frac{5}{21}t,\ x_2 = \frac{1+2t}{7}, x_3 = t,\ t \in \mathbf{R}\right\} &= \left\{\left(\frac{2}{7} + \frac{5}{21}t, \frac{1+2t}{7}, t\right) | t \in \mathbf{R}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, 0\right) + t\left(\frac{5}{21}, \frac{2}{7}, 1\right) | t \in \mathbf{R}\right\} \end{aligned}$$

Possiamo interpretare ciascuna delle due equazioni del sistema come un piano in $\mathbf{R}^3$, allora l'insieme S delle soluzioni sarà la retta intersezione di questi due piani.

ii. Anche in questo caso il coefficiente di $x_1$ nella prima equazione, ossia $a_{11}$ è diverso da zero, pertanto possiamo considerare un sistema equivalente a quello dato sostituendo la seconda equazione con una combinazione lineare di se stessa e della prima equazione: $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}} f_1(x) + f_2(x) = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} b_1 + b_2$. Il coefficiente per cui moltiplichiamo la prima equazione sarà in questo caso uguale a $-\frac{-6}{3} = 2$.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \iff \boxed{2f_1(x) + f_2(x)} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni del sistema è l'insieme vuoto $\mathrm{S} = \emptyset$.
Geometricamente, ogni equazione individua un piano in $\mathbf{R}^3$. Qui le due equazioni descrivono due piani paralleli non coincidenti dunque non hanno punti in comune.

iii. Come abbiamo visto in precedenza, il coefficiente $a_{11} = 3 \neq 0$ pertanto possiamo considerare un sistema equivalente a quello dato che al posto della seconda equazione ha l'equazione $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}} f_1(x) + f_2(x) = -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} b_1 + b_2$.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -\dfrac{1}{2} \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \iff \boxed{2f_1(x) + f_2(x)} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -\dfrac{1}{2} \\ \quad - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque dalla seconda equazione si ha che $x_2 = 0$ e sostituendo nella prima si ottiene $3x_1 - x_3 = -\frac{1}{2}$. Possiamo porre $x_3 = t$ come parametro libero e dunque $x_1 = -\frac{1}{6} + \frac{t}{3}$. Allora l'insieme delle soluzioni è

$$\mathrm{S} = \left\{\left(-\frac{1}{6} + \frac{t}{3}, 0, t\right) | t \in \mathbf{R}\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{6}, 0, 0\right) + t\left(\frac{1}{3}, 0, 1\right) | t \in \mathbf{R}\right\}$$

Una possibile interpretazione geometrica consiste nel vedere l'insieme delle soluzioni di ogni equazione come un piano in $\mathbf{R}^3$, in questo caso si tratta di due piani incidenti quindi l'insieme delle soluzioni è la retta di intersezione di questi due piani.

## 5.9 Esercizio **riduzione di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite a un sistema triangolare equivalente**

Siano $\mathbf{a_1} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ , $\mathbf{a_2} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ e $\mathbf{a_3} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ tre terne ordinate di numeri reali e consideriamo le funzioni lineari $f_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ , $f_2(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$ e $f_3(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$ , definite su $\mathbf{R}^3$.

Sia $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$. L'insieme delle tre equazioni lineari $\begin{cases} f_1(x) & = & b_1 \\ f_2(x) & = & b_2 \\ f_3(x) & = & b_3 \end{cases}$ si dice *sistema* di tre equazioni lineari in tre incognite.

Il vettore $\mathbf{b}$ si dice *termine noto* del sistema e la matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ si dice *matrice dei coefficienti.*

Le variabili $x_1, x_2, x_3$ sono le incognite. Risolvere il sistema vuol dire descrivere, rappresentare, comprendere l'insieme dei vettori $x = (x_1, x_2, x_3)$ che verificano tutte le equazioni del sistema.

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{cases} \tag{5.9.1}$$

Guideremo lo studente a trasformare il sistema qui sopra in un altro sistema equivalente, ossia che ha le stesse soluzioni, di forma triangolare. Quest'ultimo sistema si potrà risolvere facilmente e in questo modo si saranno trovate le soluzioni del sistema originale. Utilizzeremo un algoritmo che viene talvolta chiamato *algoritmo di triangolazione di Gauss*. Questo algoritmo si può adattare facilmente a sistemi lineari di $k$ equazioni in $n$ incognite.

La procedura richiede diversi passi.
**Primo passo**: si moltiplica la prima equazione per un opportuno coefficiente $c$ e la si somma alla seconda equazione, ottenendo in tal modo una nuova equazione

$$cf_1(x) + f_2(x) = cb_1 + b_2 \tag{5.9.2}$$

La scelta di $c$ viene fatta in modo che il coefficiente di $x_1$ nell'equazione (5.9.2) risulti zero (questo è possibile grazie al fatto che il coefficiente $a_{11}$ è diverso da zero). L'equazione ottenuta si sostituisce allora alla seconda equazione del sistema iniziale e si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} f_1(x) & = & b_1 \\ cf_1(x) + f_2(x) & = & cb_1 + b_2 \\ f_3(x) & = & b_3 \end{cases} \tag{5.9.3}$$

che, nel caso in esame, è precisamente

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 0 \cdot x_1 & + & \frac{5}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \\ -3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{cases} \tag{5.9.4}$$

Lo studente dimostri che il nuovo sistema è equivalente al primo.

**Secondo passo** [del tutto analogo al precedente, in effetti l'algoritmo si presta bene a essere codificato come ripetizione di una stessa routine]: si moltiplica la prima equazione per un opportuno coefficiente $k$ e la si somma alla *terza* equazione, ottenendo in tal modo una nuova equazione

$$kf_1(x) + f_3(x) = kb_1 + b_3 \tag{5.9.5}$$

La scelta di $k$ viene fatta in modo che il coefficiente di $x_1$ nell'equazione (5.9.5) risulti zero. Si mette poi l'equazione (5.9.5) al posto della terza equazione del sistema precedente e si ottiene

$$\begin{cases} f_1(x) & = & b_1 \\ cf_1(x) + f_2(x) & = & cb_1 + b_2 \\ kf_1(x) + f_3(x) & = & kb_1 + b_3 \end{cases} \tag{5.9.6}$$

che, nel caso in esame, è precisamente

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 0 \cdot x_1 & + & \frac{5}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \\ 0 \cdot x_1 & - & \frac{5}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{5.9.7}$$

Lo studente si convinca che questo sistema è equivalente al precedente.

A questo punto siamo arrivati a un sistema in cui tutti i coefficienti di $x_1$ sono nulli, escluso il coefficiente nella prima equazione. L'idea è di ripetere ancora la procedura, usando la seconda equazione insieme alla terza per formare una opportuna combinazione, nella quale il coefficiente di $x_2$ diventi nullo, da sostituire alla terza equazione del sistema (5.9.7), in modo da ottenere infine un sistema triangolare. Facciamo quindi il **Terzo passo**: si moltiplica la seconda equazione di (5.9.7) per un opportuno coefficiente $p$ e si somma alla terza equazione, e il risultato si prende come terza equazione del nuovo sistema. Con questo tipo di operazione la situazione dei coefficienti di $x_1$ non cambia e scegliendo $p = 1$ si vede che il coefficiente di $x_2$ nella terza equazione si annulla. Il risultato è il seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 0 \cdot x_1 & + & \frac{5}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}x_3 & = & -\frac{1}{2} \\ 0 \cdot x_1 & - & 0 \cdot x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{cases} \tag{5.9.8}$$

Anche quest'ultimo sistema è equivalente ai precedenti, ma è triangolare superiore e facilmente si ricava la soluzione: $\mathbf{x} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right)$ che è anche la soluzione del sistema di partenza. Si suggerisce agli studenti di verificare che la soluzione è corretta sostituendo i valori nel sistema iniziale.

Si suggerisce anche di dare una interpretazione geometrica qualitativa del procedimento che si è svolto.

# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 6 foglio di esercizi - 31 marzo 2016

**Sistemi lineari a gradini (o a scala); riduzione a scala di un sistema lineare. Uso dei sistemi lineari per risolvere problemi geometrici: combinazioni lineari di vettori, insiemi generatori, insiemi linearmente indipendenti, basi. Rango di una matrice. Matrice inversa.**

### 6.1 Esercizio sistemi a scala

Si scrivano in forma matriciale i seguenti sistemi a scala e di ciascuno:

a) si descriva in forma parametrica l'insieme delle soluzioni;

b) si trovino una base e la dimensione dello spazio $Y$ generato dalle colonne della matrice dei coefficienti (in altre parole, $Y$ è lo spazio dei termini noti per i quali il sistema ha soluzioni).

i. $$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

ii. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

iii. $$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_4 = -6 \end{cases}$$

iv. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

v. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 = 4 \end{cases}$$

vi. $$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_4 = 3 \end{cases}$$

vii. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -1 \end{cases}$$

viii. $\begin{cases} x_2 - x_5 = 0 \\ 2x_7 = 6 \end{cases}$ $\qquad x = (x_1, \ldots, x_9) \in \mathbf{R}^9$

**Soluzione**

Osserviamo in via preliminare che in un sistema a scala, di solito, il numero di incognite che si trova in ciascuna equazione decresce man mano che si scende (non è *sempre* vero, perché?). Di solito conviene quindi cominciare a determinare le soluzioni dall'equazione più in basso, dove il numero di incognite è in generale minimo.
Indichiamo l'insieme delle soluzioni con la lettera S.

i. Dall'equazione più in basso otteniamo $x_2 = \dfrac{1}{2}$ ; sapendo questo, dalla prima equazione ricaviamo $x_1 = -\dfrac{3}{8}$ . Pertanto la coppia $\big(-\dfrac{3}{8}, \dfrac{1}{2}\big)$ è soluzione del sistema ed è l'unica soluzione.

In altre parole, l'insieme delle soluzioni del sistema è $\mathrm{S} = \Big\{ \big(-\dfrac{3}{8}, \dfrac{1}{2}\big) \Big\}$ ed è costituito da un solo punto.

Il sistema è risolto e ci si potrebbe anche fermare qui. Ma ci perderemmo tutto il bello. Molto più utile è continuare a guardare questo semplicissimo esercizio e scoprire quante cose ci possiamo vedere. Cominciamo con l'avere ben chiare in mente due interpretazioni geometriche del sistema.

La prima è di pensare che ciascuna equazione del sistema determina una retta, ossia ha come insieme delle soluzioni i punti di una retta. Ne segue che la soluzione del sistema è il punto che appartiene a entrambe le rette.

La seconda è di pensare il sistema come una equazione vettoriale:

$$x_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.1.1}$$

Con questa interpretazione, risolvere il sistema significa scrivere la colonna dei termini noti $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare delle colonne $\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dei coefficienti del sistema, con coefficienti $x_1$ , $x_2$ . Si capisce quindi meglio la domanda b) dell'esercizio: l'insieme $Y$ dei termini noti $B$ per i quali il sistema è risolubile sono gli elementi dello spazio vettoriale generato dalle colonne della matrice dei coefficienti.

Geometricamente la (6.1.1) si può vedere come una decomposizione del vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ nella somma di due vettori lungo due direzioni assegnate.

Ricordiamo anche che con il linguaggio delle matrici, la (6.1.1) si scrive $AX = B$ , dove $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ è la matrice dei coefficienti del sistema, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è il vettore colonna dei termini noti e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ è il vettore colonna dei coefficienti della combinazione lineare, che in questo caso sono incognite da determinare.

A questo punto ci chiediamo: cosa succede se cambiamo il vettore $B$ dei termini noti del sistema? Ci sarà ancora una soluzione?

Se ripensiamo a come abbiamo trovato la soluzione all'inizio, è chiaro che, comunque siano i termini noti, si trova in ogni caso una e una sola soluzione. Ma conviene dire questa stessa cosa cosa anche in altri modi diversi, che è utile imparare in questo caso semplice, prima di passare a sistemi più complicati. Consideriamo il sistema $AX = 0$ , che ha gli stessi coefficienti e termini noti uguali a zero. Si dice che questo è il sistema *omogeneo* associato al sistema i. È immediato che il sistema omogeneo ha una e una sola soluzione, cioè $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Possiamo dire questo anche nel modo seguente:

$$\text{per ogni } x_1, x_2 \in \mathbf{R} \qquad \text{vale l'implicazione:} \qquad x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} = 0 \implies (x_1, x_2) = (0, 0)$$

e questo equivale a dire che i vettori $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ sono linearmente indipendenti. E poiché siamo in $\mathbf{R}^2$, sono anche una base di $\mathbf{R}^2$. E quindi, per qualsiasi vettore $B \in \mathbf{R}^2$ esiste uno e un solo modo di scrivere $B$ come combinazione lineare di $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$. Ossia esiste una e una sola soluzione del sistema $AX = B$.

Osserviamo che in questo modo abbiamo anche risposto alla domanda b) dell'esercizio: lo spazio $Y$ dei termini noti per cui esiste una soluzione del sistema $AX = B$ è tutto $\mathbf{R}^2$. Una sua base è ovviamente la base standard, ma

un'altra base è costituita ad esempio dalle colonne $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$. Si tratta evidentemente di un esempio semplicissimo, ma conviene capirlo bene.
ii. Dall'equazione più in basso si ottiene $x_3 = 0$ ; sapendo questo, risaliamo alla seconda equazione, da cui ricaviamo $x_2 = 0$ ; infine dalla prima equazione otteniamo $x_1 = \frac{1}{2}$ . In conclusione c'è una e una sola terna soluzione del sistema e si ha $\mathrm{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \right\}$.
Esaminando il procedimento risolutivo, si capisce immediatamente che, comunque siano presi i termini noti, esiste sempre una e una sola terna soluzione del sistema. Questo discende dal fatto che

- l'ultima equazione ha solo l'incognita $x_3$ che ha un coefficiente diverso da zero, e permette di determinare $x_3$
- la seconda equazione ha solo le incognite $x_2$ e $x_3$, ma $x_3$ è già stata determinata e $x_2$ ha un coefficiente diverso da zero, dunque si determina $x_2$;
- la terza equazione ha le incognite $x_1$, $x_2$ e $x_3$, ma $x_2$ e $x_3$ sono già state determinate e $x_1$ ha un coefficiente diverso da zero, dunque si determina $x_1$.

Se scriviamo il sistema in forma matriciale abbiamo

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e si capisce qual è la particolare struttura dei coefficienti che, comunque siano i termini noti, garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema: il sistema ha lo stesso numero di equazioni e di incognite, ossia la matrice dei coefficienti è quadrata; inoltre in questa matrice tutti i termini sotto la diagonale sono nulli, e tutti i termini sulla diagonale sono diversi da zero.

Una interpretazione geometrica del sistema è che ogni equazione individua un piano e i tre piani si intesecano in uno e un solo punto.

Un'altra interpretazione è che esiste una e una sola terna di coefficienti $(x_1, x_2, x_3)$ per cui la combinazione lineare

$$x_1\mathbf{c_1} + x_2\mathbf{c_2} + x_3\mathbf{c_3} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

è uguale al vettore dei temini noti.
Se prendiamo il sistema omogeneo associato, vediamo che ha come unica soluzione la terna nulla $(0,0,0)$. Questo fatto si esprime anche dicendo che i tre vettori colonna del sistema sono linearmente indipendenti. Poiché siamo in $\mathbf{R}^3$, una terna di vettori indipendenti è anche un sistema di generatori. Lo spazio $Y$ generato dalle colonne è quindi tutto $\mathbf{R}^3$, cosa che peraltro avevamo già visto subito, quando abbiamo visto che, comunque presi i termini noti, il sistema ha una soluzione.

iii. Per trovare le soluzioni del sistema si può seguire un procedimento analogo a quello utilizzato per il sistema ii. Si comincia dall'ultima equazione da cui si ricava $x_4 = -2$. Questa informazione si inserisce nella seconda equazione dal basso e si ottiene $x_3 = -2x_4 + 1 = 5$. Continuando in questo modo si ottiene che il sistema ha come unica soluzione la quaterna $(52, 14, 5, -2)$.
Anche in questo caso è possibile dire subito che, comunque siano dati i termini noti, il sistema è risolubile e ha una soluzione unica. Infatti il sistema si può scrivere in forma matriciale $AX = B$, dove $A$ è la matrice dei coefficienti e $B$ è il vettore dei termini noti:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Come per il sistema ii., dalla forma della matrice $A$, che è quadrata, ha i termini sotto la diagonale nulli e i termini sulla diagonale non nulli, si vede che il sistema ha una e una sola soluzione per qualsiasi termine noto. Ossia le colonne sono linearmente indipendenti. Ossia le colonne generano $\mathbf{R}^4$.

iv. Per risolvere il sistema partiamo dall'equazione più in basso, dove si trovano le incognite $x_2\,,x_3$ . Se diamo un valore a una delle due, il valore dell'altra ne viene determinato. Prendiamo allora ad esempio $x_3 = t$ come parametro libero e otteniamo che $x_2 = \frac{1}{2}t+1$ ; con questa informazione risaliamo alla prima equazione e otteniamo anche $x_1 = -\frac{3}{4}t+1$ . In conclusione abbiamo che, per ogni valore fissato del parametro $t$, la terna

$$\left(-\frac{3}{4}t+1\,,\,\frac{1}{2}t+1\,,\,t\right)$$

è una soluzione del sistema. Possiamo riscrivere questa terna come somma di una parte costante e di una parte che dipende dal parametro $t$, e poi possiamo raccogliere $t$, come si vede sotto

$$\left(-\frac{3}{4}t+1\,,\,\frac{1}{2}t+1\,,\,t\right) = (1\,,1\,,0) + \left(-\frac{3}{4}t\,,\,\frac{1}{2}t\,,\,t\right) = (1\,,1\,,0) + t\left(-\frac{3}{4}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,1\right)$$

In altri termini, abbiamo dato una descrizione parametrica dell'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\mathrm{S} = \left\{(1,1,0) + t\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},1\right) \mid t \in \mathbf{R}\right\}$$

e vediamo chiaramente che è una retta che passa per il punto $(1,1,0)$ ed è parallela alla retta per l'origine generata dal vettore $(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},1)$.

Anche in questo caso abbiamo due interpretazioni geometriche.

La prima: ciascuna delle due equazioni del sistema rappresenta un piano in $\mathbf{R}^3$. L'intersezione dei due piani è la retta delle soluzioni del sistema.

La seconda:

$$x_1\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \tag{6.1.2}$$

ossia: il vettore dei termini noti, in $\mathbf{R}^2$, è combinazione lineare delle colonne della matrice.

Vediamo ora cosa succede se facciamo variare il vettore dei termini noti. La situazione è la solita. Consideriamo il sistema scritto in forma matriciale $AX = B$, dove

$$A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

è la matrice dei coefficienti. In primo luogo consideriamo il sistema omogeneo associato $AX = 0$, ossia prendiamo come termine noto il vettore nullo $(0,0)$. Procedendo come al solito, vediamo che il sistema omogeneo ha come soluzione la retta

$$\mathrm{S}_0 = \left\{t\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},1\right) \mid t \in \mathbf{R}\right\}$$

che è un sottospazio vettoriale di dimensione uno di $\mathbf{R}^2$, ossia una retta passante per l'origine. Dato un termine noto $B$ qualsiasi, l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$ è la retta

$$\mathrm{S}_B = X_B + \mathrm{S}_0$$

parallela a $\mathrm{S}_0$ e passante per il punto $X_B$, dove $X_B$ è una qualsiasi soluzione del sistema $AX = B$.

Infine consideriamo la domanda b), ossia la questione di come descrivere lo spazio $Y$ generato dalle colonne della matrice dei coefficienti; occorre pertanto trovare una base e la dimensione di $Y$. Ma $Y$ non è altro che l'insieme dei termini noti $B$ per i quali esistono soluzioni del sistema $AX = B$ e abbiamo appena visto che una soluzione (anzi, infinite) esiste sempre. Quindi $Y = \mathbf{R}^2$.

Osserviamo che le tre colonne della matrice dei coefficienti devono essere linearmente *dipendenti*, poiché sono vettori in uno spazio di dimensione 2. Però necessariamente una coppia di colonne devono essere linearmente indipendenti. Per trovarle, basta osservare che le prime due colonne formano una matrice triangolare che ha tutti i termini sulla diagonale diversi da zero. Pertanto, per la discussione già fatta per i sistemi precedenti, le prime due colonne sono indipendenti.

v. Nell'equazione più in basso si trova solo l'incognita $x_2$ e da essa si ottiene $x_2 = 2$. Risaliamo alla prima equazione e otteniamo $2x_1 + 2x_3 = 3$ , nella quale possiamo ad esempio prendere come parametro libero $x_1 = t$. In conclusione si ha

$$\mathrm{S} = \left\{ \left( t, 2, \frac{3}{2} - t \right) \mid t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \left( 0, 2, \frac{3}{2} \right) + t\big(1, 0, -1\big) \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

Vediamo quindi che l'insieme delle soluzioni è una retta, che passa per il punto $(0, 2, \frac{3}{2})$ ed è parallela alla retta per l'origine generata dal vettore $(1, 0, -1)$.

Per ogni termine noto $B$ il sistema ha soluzione, quindi lo spazio $Y$ generato dalle colonne della matrice dei coefficienti è $\mathbf{R}^2$ .

vi. Nell'equazione più in basso, ossia la terza, si trova solo l'incognita $x_4$ e da essa si ottiene $x_4 = 1$. Risaliamo alla seconda equazione e otteniamo $x_3 = 1 + 2x_4 = 3$ . Infine si arriva alla prima equazione nella quale possiamo ad esempio prendere come parametro libero $x_2 = t$ e otteniamo $x_1 = 4t + 1$ . In conclusione si ha

$$\mathrm{S} = \big\{ \big(4t+1, t, 3, 1\big) \mid t \in \mathbf{R} \big\} = \big\{ \big(1, 0, 3, 1\big) + t\big(4, 1, 0, 0\big) \mid t \in \mathbf{R} \big\}$$

Vediamo quindi che l'insieme delle soluzioni è una retta, che passa per il punto $(1, 0, 3, 1)$ ed è parallela alla retta per l'origine generata dal vettore $(4, 1, 0, 0)$, la quale è l'insieme $\mathrm{S}_0$ delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Con lo stesso procedimento si vede che per ogni termine noto $B$ il sistema ha una soluzione (anzi ha una retta di soluzioni, parallela alla retta $\mathrm{S}_0$ ), quindi lo spazio $Y$ generato dalle colonne della matrice $A$ dei coefficienti è $\mathbf{R}^3$ . Osservando la matrice

$$.A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

notiamo che la prima, terza e quarta colonna formano una matrice quadrata triangolare, nella quale i termini sulla diagonale sono diversi da zero. Quindi tali colonne sono linearmenti indipendenti e pertanto generano $Y$. Ricordiamo che: il primo termine da sinistra che in ciascuna riga è diverso da zero si chiama *pivot*. Nel nostro caso i pivot sono i numeri

-1 nella prima riga

1 nella seconda riga

3 nella terza riga

In generale si ha che *le colonne in cui si trovano i pivot sono una base dello spazio $Y$ generato dalle colonne.*

vii. Nell'equazione più in basso si trovano le incognite $x_5, x_6, x_7$ . Prendiamo ad esempio $x_7 = t$ e $x_6 = k$ come parametri liberi e otteniamo $x_5 = -1 - k - t$ ; con questa informazione risaliamo alla seconda equazione e otteniamo $x_3 = -x_4 + 1 + k + t$ dunque prendiamo $x_4 = h$ come altro parametro libero e otteniamo $x_3 = -h + 1 + k + t$ . Infine si arriva alla prima equazione, nella quale possiamo ad esempio prendere come parametro libero $x_2 = s$ e otteniamo $x_1 = 1 - s + h - 1 - k - t$ . In conclusione si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \big\{ \big( -s + h - k - t,\ s,\ -h + 1 + k + t,\ h,\ -1 - k - t,\ k,\ t \big) \mid t, k, h, s \in \mathbf{R} \big\} \\ &= \big\{ \big(0, 0, 1, 0, -1, 0, 0\big) + s\big( -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\big) + h\big(1, 0, -1, 1, 0, 0, 0\big) + k\big( -1, 0, 1, 0, -1, 1, 0\big) \\ &\qquad + t\big( -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1\big) \mid t, k, h, s \in \mathbf{R} \big\} \end{aligned}$$

Vediamo quindi che l'insieme delle soluzioni è un piano $4-$dimensionale in $\mathbf{R}^7$, che passa per il punto $(0, 0, 1, 0, -1, 0, 0)$ ed è parallelo al sottospazio $4-$dimensionale generato dai vettori

$$-\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}\,, \qquad \mathbf{e_1} - \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}\,, \qquad -\mathbf{e_1} - \mathbf{e_5} + \mathbf{e_6}\,, \qquad -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3} - \mathbf{e_5} + \mathbf{e_7}\,.$$

Per rispondere alla domanda b) consideriamo come nei casi precedenti la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso il sistema ha sempre soluzione e quindi lo spazio generato dalle colonne è $Y = \mathbf{R}^3$. Ovviamente una sua base è la base standard, ma un'altra base è costituita dalle colonne dove si trovano i pivot, ossia la prima, la terza e la quinta.

viii. Il testo della domanda ci informa che il sistema ha le nove incognite $x_1, \dots x_9$, anche se nelle equazioni compaiono soltanto le tre incognite $x_2, x_5, x_7$. Comprendiamo quindi subito che le sei incognite $x_1, x_3, x_4, x_6, x_8, x_9$ sono libere da condizioni e saranno altrettanti parametri liberi che descrivono l'insieme delle soluzioni. A proposito delle tre incognite che sono legate dalle equazioni del sistema, partendo dal basso, si ottiene subito che $x_7 = 3$; poi prendendo ad esempio $x_5$ come parametro libero, si ottiene $x_2 = x_5$. In conclusione le soluzioni del sistema sono le 9-uple del tipo

$$\big(x_1, x_5, x_3, x_4, x_5, x_6, 3, x_8, x_9\big) =$$

$$3\mathbf{e_7} + x_1\mathbf{e_1} + x_3\mathbf{e_3} + x_4\mathbf{e_4} + x_5(\mathbf{e_2} + \mathbf{e_5}) + x_6\mathbf{e_6} + x_8\mathbf{e_8} + x_9\mathbf{e_9}$$

L'equazione di sopra è una equazione parametrica dell'insieme delle soluzioni del sistema, che è un piano 7-dimensionale in $\mathbf{R}^9$, passante per il punto $3\mathbf{e_7}$ e parallelo al sottospazio k-dimensionale generato dai vettori

$$\mathbf{e_1}\,, \qquad \mathbf{e_3}\,, \qquad \mathbf{e_4}\,, \qquad \mathbf{e_2} + \mathbf{e_5}\,, \qquad \mathbf{e_6}\,, \qquad \mathbf{e_8}\,, \qquad \mathbf{e_9}$$

Per rispondere alla domanda b) notiamo che per ogni termine noto $B$ il sistema ha soluzione, quindi lo spazio $Y$ generato dalle colonne della matrice dei coefficienti è tutto $\mathbf{R}^2$. I pivot si trovano nella seconda e settima colonna, le quali colonne sono una base di $Y$.

Osserviamo che in tutti i sistemi dell'esercizio **??** lo spazio $Y$ generato dalle colonne della matrice dei coefficienti ha dimensione uguale al numero di equazioni. Vedremo più avanti esempi di sistemi per i quali la dimensione di $Y$ è minore del numero di equazioni.

## 6.2 Esercizio **riduzione a scalini di un sistema lineare (1)**

Mediante una opportuna sequenza di operazioni elementari sulle righe, si trasformi ciascuno dei seguenti sistemi in un sistema a scala equivalente. Si scrivano quindi le equazioni del sistema a scala ottenuto e si descriva in forma parametrica l'insieme delle soluzioni. Si dia infine una interpretazione geometrica dei sistemi e delle soluzioni.

i. $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii. $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

iii. $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iv. $$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

v. $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Soluzione**

**i.** Utilizziamo l'algoritmo di eliminazione di Gauss. Si può passare dal sistema assegnato a un sistema equivalente, moltiplicando la prima riga per il fattore $-\dfrac{1}{2}$ e sommandola alla seconda riga. In questo modo la prima riga è rimasta invariata e la seconda è diventata $-\dfrac{1}{2}r_1 + r_2$. Indichiamo questo passaggio nel modo seguente

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \end{array} \right. \iff \boxed{-\frac{1}{2}r_1 + r_2} \to \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ & & \frac{5}{2}x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

La ragione per cui si è scelto il fattore $-\frac{1}{2}$ per moltiplicare $r_1$ è ovviamente che in questo modo si riesce ad annullare il coefficiente dell'incognita $x_1$ nella seconda equazione del nuovo sistema, e si ottiene un sistema a scala, anzi triangolare, che si risolve facilmente: come si è visto nell'esercizio precedente, si comincia dall'equazione inferiore e si ottiene che $x_2 = 0$; poi dalla prima equazione si ottiene anche che $x_1 = 0$. In conclusione il sistema ha come unica soluzione la coppia $(0,0)$, ossia l'insieme S delle soluzioni del sistema contiene solamente il vettore nullo ed è un sottospazio di dimensione zero.

Vediamo ora come l'algoritmo sopra esposto si può scrivere operando soltanto sulla matrice dei coefficienti e dei termini noti del sistema, senza ripetere la scrittura delle incognite. Per cominciare, ricordiamo che nel nostro caso:

la matrice dei coefficienti è la matrice quadrata $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$;

la matrice dei termini noti è la matrice colonna $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

la *matrice completa del sistema* è la matrice che accosta le matrici precedenti: $[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$.

La procedura usata sopra per trasformare il sistema assegnato in un sistema a scala si descrive allora sinteticamente come segue:

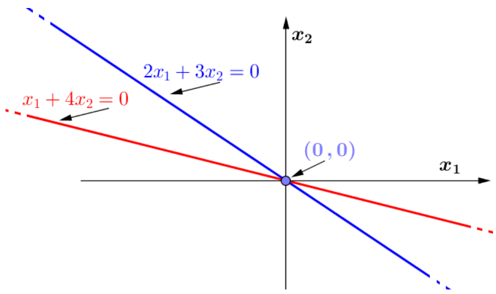
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{-\frac{1}{2}r_1 + r_2} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Un altro modo di procedere, che porta comunque a un sistema triangolare equivalente, poteva essere il seguente

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{r_1 - 2r_2} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Il vantaggio del secondo modo può essere che i coefficienti delle operazioni sulle righe non sono frazioni ed è graficamente un po' più compatto da scrivere. In pratica si cerca di adottare un procedimento che renda i calcoli più semplici possibile. Bisogna fare però attenzione che quando si va a sostituire una riga $r$ con una combinazione lineare di righe, tra queste deve esserci sempre la stessa riga $r$, con un coefficiente diverso da zero, altrimenti si perde l'informazione che contiene l'equazione corrispondente.

Diamo ora un'interpretazione geometrica dei sistemi che abbiamo visto sopra. Cominciamo dal sistema i. Se interpretiamo ogni riga come un'equazione lineare, per ciascuna di tali equazioni l'insieme delle soluzioni è una retta passante per l'origine. L'intersezione di tali rette è il vettore nullo, cioè l'origine $O = (0,0)$, che è la soluzione unica del sistema.



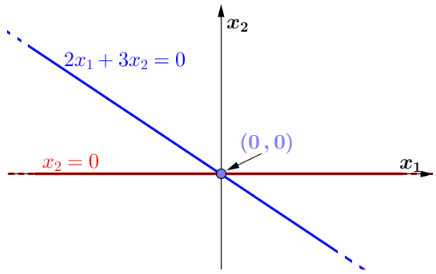

Un'altra possibile interpretazione geometrica dello stesso sistema i. si ottiene considerando i vettori colonne

$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ della matrice $A$ e osservando che il sistema i. si scrive in modo equivalente come segue:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.2.1}$$

Si vede allora che una coppia $(x_1, x_2)$ è soluzione del sistema se e solo se il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare, con coefficienti $x_1$, $x_2$, delle colonne $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$. Dal momento che questo sistema, come si è visto, ha solo la soluzione $(0,0)$, deduciamo che le colonne $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ sono vettori linearmente indipendenti.
Vediamo anche le interpretazioni geometriche del sistema triangolare equivalente. Come visto in precedenza per il sistema i., se interpretiamo ciascuna riga come un'equazione lineare, il suo insieme delle soluzioni è una retta

passante per l'origine. L'intersezione di tali rette è l'origine $O=(0,0)$ che è la soluzione del sistema. La situazione è rappresentata nella figura sotto.




Un'altra possibile interpretazione geometrica del sistema triangolare si ottiene considerando le colonne

$$\mathbf{c_1}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{c_2}=\begin{bmatrix}3\\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

della sua matrice dei coefficienti. Una coppia $(x_1,x_2)$ è allora soluzione del sistema se e solo se il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare delle colonne $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ con coefficienti $x_1$, $x_2$. Poiché abbiamo visto che questo si può fare solamente con la coppia $(x_1,x_2)=(0,0)$ , queste colonne sono linearmente indipendenti.

**ii.** Notiamo che il sistema ii. ha la stessa matrice dei coefficienti del sistema i. ma una diversa matrice colonna dei termini noti. In questo caso la matrice completa del sistema è

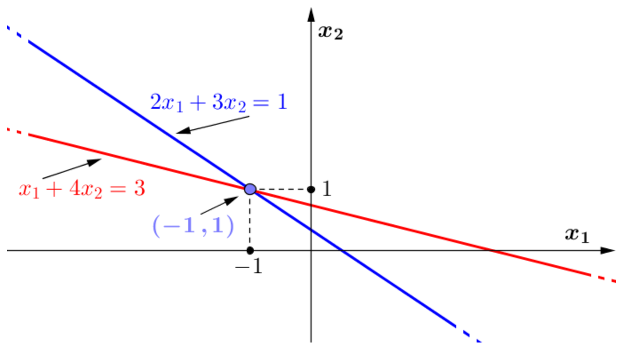
$$\left[\begin{array}{cc|c}2&3&1\\1&4&3\end{array}\right]$$

Con lo stesso procedimento usato nel sistema i. riduciamo a scalini la matrice completa:

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&3&1\\1&4&3\end{array}\right] \iff \boxed{-\frac{1}{2}r_1+r_2}\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}2&3&1\\0&\frac{5}{2}&\frac{5}{2}\end{array}\right]$$

Pertanto il sistema ii. $\begin{cases}2x_1+3x_2 &= 1\\ x_1+4x_2 &= 3\end{cases}$ risulta essere equivalente al sistema a scala $\begin{cases}2x_1 + 3x_2 = 1\\ \frac{5}{2}x_2 = \frac{5}{2}\end{cases}$ che ha come soluzione il punto (o vettore) di coordinate $(-1,1)$.
Vediamo anche in questo caso alcune interpretazioni geometriche del sistema ii.

Se interpretiamo ogni riga come un'equazione lineare, per ciascuna di tali equazioni l'insieme delle soluzioni è una retta ma a differenza del caso i., questa **non** passa per l'origine. L'intersezione di tali rette è il punto $(-1,1)$ che è la soluzione del sistema.

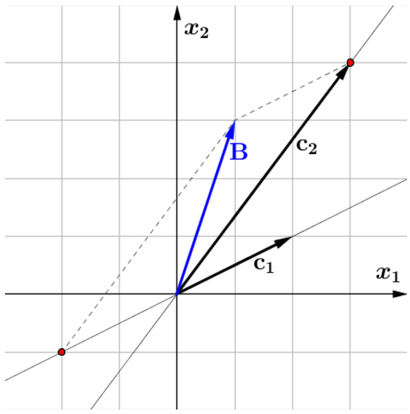



Un'altra possibile interpretazione geometrica si ottiene considerando le colonne $\mathbf{c_1}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ e $\mathbf{c_2}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ della matrice dei coefficienti. Una coppia $(x_1,x_2)$ è allora soluzione del sistema se e solo se

$$x_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \tag{6.2.2}$$

ossia se la colonna dei termini noti $B = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ è combinazione lineare delle colonne $\mathbf{c_1}$ , $\mathbf{c_2}$ con coefficienti $x_1$ , $x_2$ .

Nel nostro caso c'è l'unica soluzione $x_1 = -1$ , $x_2 = 1$ e la situazione si vede rappresentata nella figura sotto




**iii.** Consideriamo la matrice completa del sistema e procediamo con operazioni elementari sulle righe. Osserviamo che la seconda riga ha primo termine non nullo e uguale a 1 quindi, per rendere i conti più agevoli, possiamo decidere di tenere ferma la seconda riga e modificare la prima. Facciamo allora in primo luogo l'operazione elementare di scambio della prima riga con la seconda. Poi facciamo un secondo passaggio in cui lasciamo la nuova prima riga $r_1$ invariata e alla seconda riga $r_2$ sommiamo la prima riga $r_1$ moltiplicata per un fattore $-2$ .

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&4&0\\1&0&1&0\end{array}\right] \iff \begin{array}{c}\boxed{r_2}\to\\ \boxed{r_1}\to\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&3&4&0\end{array}\right] \iff \begin{array}{c}\\ \boxed{-2r_1+r_2}\to\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&3&2&0\end{array}\right]$$

In questo modo abbiamo ottenuto un sistema a scala equivalente al primo:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +x_3 = 0 \\ \qquad 3x_2 \; +2x_3 = 0 \end{cases}$$

Per risolverlo cominciamo dall'equazione inferiore. Poiché ha due incognite, una può essere scelta arbitrariamente, come un parametro libero, che può assumere tutti i valori reali. Scegliamo ad esempio $x_3$. Per ogni valore di $x_3$, le altre incognite risultano determinate e precisamente l'insieme S delle soluzioni del sistema è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dalle terne del tipo $\left(-x_3, -\frac{2}{3}x_3, x_3\right)$, dove $x_3 \in \mathbf{R}$. In altri termini S è la retta, che passa per l'origine:

$$\mathrm{S} = \left\{\left(-t, -\frac{2}{3}t, t\right) \mid t \in \mathbf{R}\right\} = \left\{t\left(-1, -\frac{2}{3}, 1\right) \mid t \in \mathbf{R}\right\}$$

Si vede anche che il sistema è risolubile per qualsiasi termine noto assegnato e quindi lo spazio $Y$ generato dalle colonne è $\mathbf{R}^2$.

**iv.** Trasformiamo la matrice completa con l'algoritmo di eliminazione di Gauss. Otteniamo

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&4&0\\1&2&0\\-1&-2&0\end{array}\right] \iff \begin{array}{c}\\ \boxed{-1/2r_1+r_2}\to\\ \boxed{1/2r_1+r_3}\to\end{array}\left[\begin{array}{cc|c}2&4&0\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

Pertanto il sistema a scala equivalente ha la sola equazione $2x_1+4x_2 = 0$. Prendendo $x_2 = t$ come parametro libero in $\mathbf{R}$, si vede che l'insieme delle soluzioni è la retta di equazione parametrica

$$\mathrm{S} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \middle| x_1 = -2t,\ x_2 = t,\ t \in \mathbf{R}\right\} = \{t(-2,1) | t \in \mathbf{R}\}$$

che passa per l'origine $(0,0)$ ed è generata dal vettore $(-2,1)$. In questo caso la matrice dei coefficienti ridotta a scala ha rango 1 e anche la matrice dei coefficienti iniziale ha rango 1. Pertanto la dimensione dello spazio $Y$ generato dalle colonne della matrice iniziale è 1 e $Y$ è una retta. Come base di $Y$ possiamo prendere la prima colonna della matrice dei coefficienti del sistema iniziale.

**v.** Lavoriamo sulla matrice completa del sistema, anche se il sistema è omogeneo, cioè la colonna dei termini noti è il vettore nullo e ovviamente rimane il vettore nullo attraverso le successive trasformazioni:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{array}{c} \boxed{r_2} \rightarrow \\ \boxed{r_1} \rightarrow \\ \phantom{x} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \iff$$

$$\iff \boxed{-2r_1 + r_2} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \iff \boxed{\frac{1}{3}r_2 + r_3} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

L'ultima matrice dei coefficienti che abbiamo ottenuto è triangolare e ha i termini sulla diagonale diversi da zero, quindi concludiamo che il sistema omogeneo che stiamo considerando ha come unica soluzione il vettore nullo. Volendo, ma non dovrebbe essere ormai più necessario, possiamo scrivere il sistema a scala equivalente

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad\quad\quad 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Cominciando a risolvere dall'ultima equazione, si vede che l'unica soluzione è $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Abbiamo infine le seguenti possibili interpretazioni geometriche:

1) ogni equazione del sistema rappresenta un piano, che è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$; l'intersezione dei tre piani è un solo punto, l'origine; le tre equazioni sono indipendenti;

2) ogni colonna del sistema è un vettore in $\mathbf{R}^3$ e l'unico modo di scrivere il vettore nullo come combinazione lineare delle colonne è usare coefficienti tutti nulli; quindi le tre colonne sono una terna di vettori linearmente indipendenti.

## 6.3 Esercizio **riduzione a scalini di un sistema lineare (2)**

Per ciascuno dei seguenti sistemi del tipo $AX = B$: 1) si descriva l'insieme delle soluzioni; 2) si trovino una base e la dimensione dello spazio $Y$ generato dalle colonne della matrice $A$ dei coefficienti (in altre parole $Y$ è lo spazio dei vettori $B$ per i quali il sistema ha soluzioni). Per svolgere l'esercizio, si trasformi ciascun sistema in un sistema a scala equivalente, utilizzando una opportuna sequenza di operazioni elementari sulle righe della matrice $[A|B]$ dei coefficienti e termini noti (o matrice completa). In questo esercizio **non** sono richieste rappresentazioni grafiche.

i. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iii. $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iv. $$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

v. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vi. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Soluzione**

**i.** Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ la matrice dei coefficienti del sistema.

Cominciamo a rispondere alla domanda 1), ossia descriviamo l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$ nel caso in cui $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è la colonna dei termini noti assegnata. Consideriamo la matrice completa associata al sistema e procediamo con operazioni elementari sulle righe:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{array}{c} \boxed{r_2} \to \\ \boxed{r_1} \to \\ \phantom{r} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{array}{c} \phantom{r} \\ \boxed{-2r_1+r_2} \to \\ \boxed{-r_1+r_3} \to \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{array}{c} \phantom{r} \\ \phantom{r} \\ \boxed{-\frac{1}{3}r_2+r_3} \to \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Pertanto il sistema a scala equivalente risulta essere $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_2 + 3x_4 = 1 \\ 2x_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Dall'ultima equazione si ha che $x_4 = -\frac{1}{6}$; con questa informazione risaliamo alla seconda equazione e otteniamo $x_2 = -\frac{1}{2}$. Saliamo infine alla prima equazione e vi sostituiamo i valori di $x_2$ e di $x_4$ appena trovati; abbiamo allora un'equazione nelle due incognite $x_1, x_3$. Prendiamo ad esempio $x_3 = t$ come parametro libero e otteniamo $x_1 = \frac{1}{2} - t - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} - t$. In conclusione si ha che l'insieme S delle soluzioni è la retta

$$\mathrm{S} = \left\{ \left( \frac{1}{3} - t, -\frac{1}{2}, t, -\frac{1}{6} \right) \mid t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \left( \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{6} \right) + t\,(-1,0,1,0) \mid t \in \mathbf{R} \right\}$$

che passa per il punto $\left( \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{6} \right)$ ed è parallela alla retta $\mathrm{S}_0$ passante per l'origine e generata dal vettore $(-1,0,1,0)$. Osserviamo che la retta $\mathrm{S}_0$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$.

Rispondiamo ora alla domanda 2), che chiede di descrivere l'insieme $Y$ dei vettori $B$ di $\mathbf{R}^3$ per i quali esiste una soluzione del sistema $AX = B$.
L'insieme $Y$ è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dalle colonne della matrice $A$, quindi la dimensione di $Y$ è uguale al rango di $A$ il quale a sua volta è uguale al rango della matrice dei coefficienti ridotta a scala. Guardando quest'ultima osserviamo che le tre colonne dove si trovano i pivot, ossia la prima, la seconda e la quarta $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti e quindi il rango di tale matrice è 3 e $Y = \mathbf{R}^3$.

In altre parole, assegnata una qualsiasi terna $B$ di numeri reali come termini noti del sistema, esiste una soluzione $X_B$; anzi ce ne sono infinite; e precisamente le soluzioni formano una retta; e precisamente la retta che passa per $X_B$ ed è parallela alla retta $\mathrm{S}_0$ delle soluzioni del sistema omogeneo.

**ii.** Consideriamo la matrice completa del sistema e operiamo come di consueto sulle righe al fine di trasformarlo in un sistema a scala equivalente.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&4&1\\5&6&0&0\end{array}\right] \iff \begin{array}{r}\\ \\ \boxed{-5r_1+r_3}\to\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&4&1\\0&-4&-15&0\end{array}\right] \iff \begin{array}{r}\\ \\ \boxed{4r_2+r_3}\to\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&4&1\\0&0&1&4\end{array}\right]$$

Il sistema a scala associato è dunque

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 &= 0\\ x_2+4x_3 &= 1\\ x_3 &= 4\end{cases}$$

e ha un'unica soluzione cioè $\mathrm{S}=\{(18,-15,4)\}$.
I vettori colonna della matrice dei coefficienti ridotta a scala sono linearmente indipendenti e quindi sono linearmente indipendenti anche le tre colonne della matrice dei coefficienti del sistema iniziale. Poiché sono tre vettori indipendenti in $\mathbf{R}^3$, che ha dimensione tre, sono anche un insieme di generatori di $\mathbf{R}^3$ e $Y=\mathbf{R}^3$

**iii.** Consideriamo la matrice completa del sistema e operiamo sulle righe al fine di trasformarlo in un sistema a scala equivalente.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0&2&1&-1&0\\1&-2&-3&0&1\\-1&1&1&2&0\end{array}\right] \iff \begin{array}{r}\boxed{r_3}\to\\ \\ \boxed{r_1}\to\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&1&1&2&0\\1&-2&-3&0&1\\0&2&1&-1&0\end{array}\right] \iff$$

$$\iff \begin{array}{r}\\ \boxed{r_1+r_2}\to\\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&1&1&2&0\\0&-1&-2&2&1\\0&2&1&-1&0\end{array}\right] \iff \begin{array}{r}\\ \\ \boxed{2r_2+r_3}\to\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&1&1&2&0\\0&-1&-2&2&1\\0&0&-3&3&2\end{array}\right]$$

Il sistema a scala equivalente è dunque

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+2x_4 &= 0\\ -x_2-2x_3+2x_4 &= 1\\ -3x_3+3x_4 &= 2\end{cases}$$

Risolvendo dal basso verso l'alto poniamo $x_4=t$ come parametro libero, quindi $x_3=-\frac{2}{3}+t$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo $x_2=\frac{1}{3}$ e sostituendo i valori delle variabili note nella prima equazione otteniamo $x_1=-\frac{1}{3}+3t$. L'insieme delle soluzioni è dunque la retta

$$\mathrm{S}=\left\{\left(-\frac{1}{3}+3t,\frac{1}{3},-\frac{2}{3}+t,t\right)\,\middle|\,t\in\mathbf{R}\right\}=\left\{\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)+t\big(3,0,1,1\big)\,\middle|\,t\in\mathbf{R}\right\}$$

che passa per il punto $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0\right)$ ed è parallela alla retta $\mathrm{S}_0$ passante per l'origine e generata dal vettore $\big(3,0,1,1\big)$. Osserviamo che la retta $\mathrm{S}_0$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $AX=0$.

Rispondiamo ora alla domanda $2)$, che chiede di descrivere l'insieme dei vettori $B$ di $\mathbf{R}^3$ per i quali esiste una soluzione del sistema $AX=B$. Tale insieme è il sottospazio $Y$ di $\mathbf{R}^3$ generato dalle colonne della matrice $A$, il quale ha la stessa dimensione dello spazio generato dalle colonne della matrice dei coefficienti ridotta a scala. Guardando quest'ultima vediamo che le tre colonne dove si trovano i pivot, ossia

$$\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti. Quindi la dimensione di $Y$ è 3 e deve essere $Y=\mathbf{R}^3$. Pertanto, fissata una qualsiasi terna $B$ di numeri reali come termini noti del sistema $AX=B$, esiste una soluzione $X_B$ del sistema stesso; anzi ci sono infinite soluzioni e precisamente le soluzioni formano una retta; che è precisamente la retta che passa per $X_B$ ed è parallela alla retta $\mathrm{S}_0$ delle soluzioni del sistema omogeneo.

iv. Per trovare le soluzioni del sistema operiamo sulla matrice completa e la riduciamo a scala:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -6 & 3 & 3 \end{array}\right] \iff \begin{array}{r} \\ \boxed{2r_1+r_2} \to \\ \boxed{1/2r_1+r_3} \to \\ \boxed{-3r_1+r_4} \to \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Il sistema a scala associato è

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 & = & 0 \\ 0 & = & 1 \\ 0 & = & 2 \\ 0 & = & 3 \end{cases}$$

il quale non ha soluzioni, ossia l'insieme $\mathrm{S} = \emptyset$ delle soluzioni è vuoto.

Lo spazio $Y$ delle quaterne $B$ per cui il sistema $AX = B$ ha soluzione è lo spazio generato dalle colonne della matrice $A$ dei coefficienti, il quale ha la stessa dimensione dello spazio generato dalle colonne della matrice dei coefficienti ridotta a scala. Quest'ultima ha rango 1, pertanto la dimensione di $Y$ è 1. Come base di $Y$ possiamo prendere una delle due colonne di A. Il sistema assegnato in effetti ha il vettore dei termini noti che non appartiene a $Y$.

v. Per trovare le soluzioni del sistema operiamo sulla matrice completa e la riduciamo a scala. Basta uno scambio di righe!

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \iff \begin{array}{r} \\ \boxed{r_1+r_2} \to \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Il sistema a scala associato è dunque

$$\begin{cases} 2x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ & -x_2 & & & = & 1 \end{cases}$$

L'ultima equazione determina $x_2 = -1$. Di conseguenza la prima equazione è nelle tre incognite $x_1, x_3, x_4$ e possiamo prendere ad esempio $x_3 = s$ e $x_4 = t$ come parametri liberi. Pertanto l'insieme delle soluzioni è il piano 2-dimensionale

$$\mathrm{S} = \left\{ \left( \frac{t-s}{2}, -1, s, t \right) \mid t, s \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ (0,-1,0,0) + s\left( -\frac{1}{2}, 0, 1, 0 \right) + t\left( \frac{1}{2}, 0, 0, 1 \right) \mid t, s \in \mathbf{R} \right\}$$

che passa per il punto $P = (0,-1,0,0)$ ed è parallelo al sottospazio vettoriale 2-dimensionale $\mathrm{S}_0$ passante per l'origine e generato dai vettori

$$\left( -\frac{1}{2}, 0, 1, 0 \right) \qquad \left( \frac{1}{2}, 0, 0, 1 \right)$$

Osserviamo che $\mathrm{S}_0$ è lo spazio delle soluzioni del sitema omogeneo associato e che $\mathrm{S} = \mathrm{S}_0 + P$

Consideriamo ora lo spazio $Y$ dei termini noti per cui il sistema ha soluzione. Sappiamo già che è tutto $\mathbf{R}^2$, poiché si vede immediatamente che comunque dati i termini noti c'è una soluzione (anzi ce n'è un piano!).

**vi.** Per trovare lo spazio delle soluzioni, consideriamo la matrice completa del sistema e operiamo sulle righe al fine di trasformarlo in un sistema a scala equivalente.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \iff \begin{array}{c} \boxed{r_2} \to \\ \boxed{r_1} \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{array}{c} \\ \\ \\ \boxed{\frac{1}{3}r_3+r_4} \to \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \iff \begin{array}{c} \\ \\ \\ \boxed{r_5} \to \\ \boxed{r_4} \to \end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema a scala associato è $\begin{cases} x_1+x_3 & = & 1 \\ x_2 & = & 0 \\ 2x_3+2x_4 & = & 0 \\ x_5+2x_6 & = & 1 \end{cases}$ che per brevità non abbiamo scritto a scala...

Osserviamo che le righe della matrice sono cinque, ma le equazioni del sistema a scala sono quattro. Infatti l'ultima riga della matrice ridotta a scala è tutta di zeri e corrisponde all'equazione $0=0$ che è ovviamente verificata e non porta alcuna informazione, quindi non la consideriamo.
Nell'ultima equazione prendiamo $x_6=t$ come parametro libero e determiniamo $x_5$. Nella penultima equazione prendiamo $x_4=t$ come parametro libero e determiniamo $x_3$. La terz'ultima equazione determina $x_2=0$. La prima equazione determina infine $x_1$ in funzione di $x_3=t$. In conclusione l'insieme delle soluzioni dipende da due parametri liberi $s,t$ ed è il piano 2-dimensionale

$$\mathrm{S}=\left\{\left(1+s,\,0,\,-s,\,s,\,1-2t,\,t\right)\,\middle|\,t,s\in\mathbf{R}\right\}=\left\{P+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}\,\middle|\,(s,t)\in\mathbf{R}^2\right\}$$

che passa per il punto $P=\left(1,0,0,0,1,0\right)$ ed è parallelo al sottospazio vettoriale 2-dimensionale $\mathrm{S}_0$ generato dai vettori

$$\mathbf{u}=\left(1,0,-1,1,0,0\right) \qquad\qquad \mathbf{v}=\left(0,0,0,0,-2,1\right)$$

Osserviamo che $\mathrm{S}_0$ è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema dato[2].

Rispondiamo ora alla seconda domanda e cerchiamo di descrivere lo spazio $Y$ dei vettori $B$ in $\mathbf{R}^5$ per i quali esiste una soluzione del sistema $AX=B$. In altre parole, $Y$ è lo spazio generato dalle colonne della matrice $A$ dei coefficienti[3]. Sappiamo che la dimensione di $Y$ è il rango di $A$, che è uguale al rango della matrice ridotta a scala. Guardiamo allora quest'ultima matrice e vediamo che ha quattro pivot, quindi ha rango 4, quindi anche la dimensione di $Y$ è 4. Se vogliamo trovare una base di $Y$ ragioniamo come segue: consideriamo le quattro colonne della matrice ridotta a scala dove si trovano i pivot, ossia le colonne 1,2,3,5. Queste quattro colonne formano una matrice di rango 4. E anche le corrispondenti colonne 1,2,3,5 della matrice $A$ formano una matrice di rango 4 (perché?). Questo vuol dire che le colonne 1, 2, 3, 5 della matrice $A$ sono indipendenti; poiché lo spazio $Y$ ha dimensione 4, tali colonne sono anche un sistema di generatori e quindi una base di $Y$.

Esprimiamo ora in un altro modo le stesse cose già dette sopra.

Sia $n$ il numero delle incognite, ossia la dimensione dello spazio dove si cercano le soluzioni.

Sia $r$ la dimensione dello spazio delle righe, ossia il rango per righe.

Sia $c$ la dimensione dello spazio delle colonne, ossia il rango per colonne.

Sia $k$ la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo.

Allora si ha $r=c$ e questo numero è il *rango* della matrice. Inoltre

$$k=n-r$$

ossia

$$n=\dim(\text{immagine di } L)+\dim(\text{nucleo di } L)$$

[2] Si vedrà più avanti che $\mathrm{S}_0$ si dice *nucleo* dell'applicazione lineare $L:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^6$ rappresentata dalla matrice A.

[3] Si vedrà più avanti che $Y$ è *l'immagine* dell'applicazione lineare $L:\mathbf{R}^5\to\mathbf{R}^6$ rappresentata dalla matrice A.

## 6.4 Esercizio **Lineare dipendenza di vettori che dipendono da un parametro**

Siano dati i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ , $\mathbf{v} = 3\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3}$ , $\mathbf{w} = \mathbf{e_1} + k\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$ in $\mathbf{R}^3$.

Mostrare che esiste un unico valore di $k$ tale che i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti. Per tale valore di $k$ si scriva ciascuno dei vettori dati come combinazione lineare degli altri due. Si rappresenti graficamente la situazione.

### Soluzione

I tre vettori sono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ tale che $x_1, x_2, x_3$ non siano tutti nulli. Questo è come dire che esiste un vettore $X \neq 0$ tale che $AX = 0$ , dove $A$ è la matrice che ha come colonne i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Riduciamo allora a scala la matrice dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & k \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \iff \boxed{-r_1 + r_2} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & k-1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \iff \boxed{-\frac{2}{3}r_2 + r_3} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & k-1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}(k-1)+1 \end{bmatrix}$$

Possiamo scrivere il sistema a scala corrispondente

$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & = & 0 \\ & 3x_2 + & (k-1)x_3 & = & 0 \\ & & \left(-\frac{2}{3}(k-1)+1\right)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

e vediamo che ha come unica soluzione la terna nulla se e solo se il coefficiente di $x_3$ nella terza equazione è diverso da zero; se invece, se quel coefficiente è zero, la terza equazione diventa $0 = 0$ e non dice nulla (quindi scompare), pertanto esistono soluzioni $X = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$. In altre parole, i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti se e solo se $-\frac{2}{3}(k-1)+1 = 0$ , cioè $-\frac{2}{3}(k-1)+1 = 0$ , ossia $k = \frac{5}{2}$ .

Rispondiamo ora alla seconda domanda e facciamo vedere come, nel caso $k = \frac{5}{2}$, ciascuno dei tre vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ si può scrivere come combinazione lineare degli altri due. Per fare questo risolviamo il sistema $AX = 0$, che, nel caso in questione, diventa

$$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & = & 0 \\ & 3x_2 + & \frac{3}{2}x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Conviene ora prendere $x_3 = t$ come parametro libero e determinare $x_1$ e $x_2$ in funzione di $t$: in questo modo si ottiene, per ogni $t$, la soluzione

$$x_1 = -t \qquad x_2 = -\frac{t}{2} \qquad x_3 = t$$

e quindi, per ogni $t \in \mathbf{R}$ , vale la relazione

$$-t\mathbf{u} - \frac{t}{2}\mathbf{v} + t\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Scegliendo opportunamente $t$ possiamo ora scrivere ciascuno dei vettori come combinazione lineare degli altri due.

- Ponendo $t = 1$ si ha $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$ .
- Ponendo $t = -2$ si ha $\mathbf{v} = -2\mathbf{u} + 2\mathbf{w}$ .
- Ponendo $t = -1$ si ha $\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{w}$ .

## 6.5 Esercizio **base e dimensione di un sottospazio di $\mathbf{R}^5$**

Sia dato l'insieme $W \subset \mathbf{R}^5$ definito da $W = \left\{ \left(x-2y\,,\ 2y+z\,,\ -x+z\,,\ 3x+4y+z\,,\ 3x-z\right) \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$
Si osservi che $W$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ e si trovi una base di $W$ e quindi la sua dimensione.

**Soluzione**

Si osservi che gli elementi di $W$ si possono pensare come le matrici colonna del tipo

$$\begin{bmatrix} x-2y \\ 2y+z \\ -x+z \\ 3x+4y+z \\ 3x-z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

dove $(x, y, z)$ sono parametri, ciascuno libero di variare in $\mathbf{R}$. In altre parole, lo spazio $W$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w}$ dove

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per trovare una base di $W$ conviene ridurre la matrice $A$ a scala. Le colonne della nuova matrice genereranno infatti lo stesso spazio $W$, ma sarà più facile stabilirne la dimensione. Utilizziamo quindi l'algoritmo di eliminazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{r_1+r_3} \rightarrow \\ \boxed{-3r_1+r_4} \rightarrow \\ \boxed{-3r_1+r_5} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{r_2+r_3} \rightarrow \\ \boxed{-5r_2+r_4} \rightarrow \\ \boxed{-3r_2+r_5} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Nella matrice ridotta a scala abbiamo la sottomatrice delle prime tre righe che ha rango 3 e quindi anche tutta la matrice ha rango 3. Ne segue che le tre colonne sono indipendenti e $W$ ha dimensione 3.

Per vedere che $\dim(W) = 3$ si può anche scrivere il sistema a scala associato all'ultima matrice:

$$\begin{cases} x_1 \; -2x_2 & = 0 \\ \quad\;\; 2x_2 + x_3 & = 0 \\ \qquad\quad 2x_3 & = 0 \\ \qquad -4x_3 & = 0 \\ \qquad -4x_3 & = 0 \end{cases}$$

Le ultime tre equazioni dicono tutte la stessa cosa, ossia $x_3 = 0$. E le altre due equazioni determinano $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Quindi le tre colonne della matrice ridotta a scala sono linearmente indipendenti, come avevamo già visto in altro modo.

## 6.6 Esercizio **spazio delle righe e spazio delle colonne**

Sia data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

i. Determinare una base e la dimensione del sottospazio $V$ di $\mathbf{R}^3$ generato dalle colonne della matrice $A$.

ii. Determinare una base e la dimensione del sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^4$ generato dalle righe della matrice $A$.

Si ricordi che la dimensione di $V$ si dice *rango per colonne* della matrice $A$, mentre la dimensione di $U$ si dice *rango per righe* della matrice $A$. In questo esercizio si chiede quindi di verificare in un caso particolare il teorema generale visto a lezione, il quale afferma: *il rango per righe è uguale al rango per colonne*.

**Soluzione**

Cominciamo dal punto ii. Riduciamo a scala la matrice $A$ utilizzando operazioni di riga:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} \\ \boxed{-2r_1+r_2} \to \\ \boxed{-r_1+r_3} \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & -4 & 12 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} \\ \\ \boxed{-r_2+r_3} \to \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che quando si moltiplica una riga $r_i$ per un numero e la si somma a un'altra riga $r_j$ e si sostituisce il risultato a quest'ultima, allora lo spazio generato dalle righe non cambia. Pertanto lo spazio generato dalle righe della matrice ridotta a scala è uguale allo spazio generato dalle righe della matrice di partenza, ossia è lo spazio $U$. Poiché la matrice ridotta a scala ha solo le prime due righe non nulle ed esse sono linearmente indipendenti, tali righe sono anche una base di $U$.

Consideriamo ora il punto i. Un modo per rispondere è di ridurre la matrice a scala *operando sulle colonne* e procedere in modo analogo a come si è fatto sopra. Si suggerisce allo studente di farlo; in tal modo verificherà che la dimensione è 2. Si può però rispondere più rapidamente utilizzando la riduzione a scala già fatta in precedenza e usando il teorema che dice “il rango per righe è uguale al rango per colonne". Infatti: vediamo che i pivot della matrice ridotta per righe sono nella prima e nella seconda colonna, che sono quindi due colonne indipendenti. Allora anche le corrispondenti due colonne della matrice iniziale $A$ sono indipendenti. Ma, grazie al teorema, la dimensione di $V$ è due e quindi la prima e seconda colonna di $A$ sono una base di $V$.

## 6.7 Esercizio **rango per riga = rango per colonna nel caso di matrici $2 \times 2$**

Sia data la matrice $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Consideriamo i vettori riga $\mathbf{r_1} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ , $\mathbf{r_2} = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ e il sottospazio $V$ generato dai vettori $\mathbf{r_1}$ , $\mathbf{r_2}$ .

Consideriamo inoltre i vettori colonna $\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ , $\mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ e il sottospazio $U$ generato dai vettori $\mathbf{c_1}$ , $\mathbf{c_2}$.

Si mostri che

i. $\dim V = 0 \iff \dim U = 0$ ii. $\dim V = 1 \iff \dim U = 1$ iii. $\dim V = 2 \iff \dim U = 2$

Complessivamente con questo esercizio si chiede di mostrare il teorema *il rango per righe è uguale al rango per colonne* nel caso particolare delle matrici $2 \times 2$. Si precisa che non si chiede allo studente di applicare in questo caso particolare la dimostrazione vista a lezione per il caso generale, ma di svolgere l'esercizio in modo elementare con un proprio ragionamento

**Soluzione**

i. $\dim V = 0 \iff \dim U = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supponiamo che $\dim V = 0$, ossia $V = \{\mathbf{0}\}$ ; allora $\mathbf{r_1} = 0$ e $\mathbf{r_2} = \mathbf{0}$, cioè $a = b = c = d = 0$ ; da questo segue $\mathbf{c_1} = \mathbf{c_2} = \mathbf{0}$ e infine $U = \{\mathbf{0}\}$ cioè $\dim U = 0$ .

$\boxed{\Longleftarrow}$ La dimostrazione è identica alla precedente, scambiando le righe con le colonne.

ii. $\dim V = 1 \iff \dim U = 1$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supponiamo che la dimensione di $V$ sia 1. Da questo segue che almeno uno dei vettori riga $\mathbf{r_1}$ , $\mathbf{r_2}$ è diverso dal vettore nullo e genera $V$. Supponiamo che sia ad esempio $\mathbf{r_1} \neq 0$ e $\mathbf{r_2} = k\mathbf{r_1}$ dove $k \in \mathbf{R}$. Quindi si ha che $c = ka$ e $d = kb$. Pertanto $\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} a \\ ka \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$ , $\mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} b \\ kb \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$ e si vede che che $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ sono linearmente dipendenti e almeno uno di essi è diverso dal vettore nullo, quindi lo spazio $U$ da essi generato ha dimensione 1 .

$\boxed{\Longleftarrow}$ La dimostrazione è identica alla precedente, scambiando le righe con le colonne.

iii. $\dim V = 2 \iff \dim U = 2$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supponiamo che la dimensione di $V$ sia 2. La dimensione di $U$ può essere zero, uno oppure due. Ma se fosse zero allora, per il punto i di sopra, sarebbe zero anche la dimensione di $V$; e se fosse uno, allora, per il punto ii di sopra, sarebbe uno anche la dimensione di $V$; in entrambi i casi si contraddirebbe l'ipotesi che $\dim(V) = 2$. Ne segue che la dimensione di $U$ deve essere due.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La dimostrazione è identica alla precedente, scambiando le righe con le colonne.

## 6.8 Esercizio **matrice inversa, risolvendo sistemi lineari**

Per ciascuna delle seguenti matrici quadrate $A$ di tipo $n \times n$ si trovi la matrice $B$ tale che $AB = I$, dove $I$ è la matrice identità. Si usi il fatto che in ciascun caso si tratta di risolvere $n$ sistemi lineari, che, nei casi considerati, sono assai semplici. Risolti i sistemi, si verifichi che effettivamente $AB = I$. Anche se uno studente conosce il concetto di determinante, **non** lo utilizzi.

i. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ii. $A = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ iii. $A = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

iv. $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ dove $a, b, c \neq 0$ v. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

**Soluzione**

i. Si chiede di trovare una matrice $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ tale che $AB = I$ cioè

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che equivale ai due sistemi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ossia

$$\begin{cases} 0\, b_{11} + 1\, b_{21} = 1 \\ 1\, b_{11} + 0\, b_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\, b_{12} + 1\, b_{22} = 0 \\ 1\, b_{12} + 0\, b_{22} = 1 \end{cases}$$

Dal sistema sulla sinistra ricaviamo $b_{11} = 0$ e $b_{21} = 1$ che ci dà la prima colonna di $B$ mentre dal sistema sulla destra ricaviamo $b_{12} = 1$ e $b_{22} = 0$ che ci dà la seconda colonna. In conclusione si ha che

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii. Si ha $A = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; posto $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} k \\ 5 \end{bmatrix}$ il sistema $AB = I$ è equivalente ai due sistemi

$$\begin{bmatrix} 3 & k \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & k \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il nostro problema è dunque diventato risolvere due sistemi di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} 3\, b_{11} + k\, b_{21} & = & 1 \\ 5\, b_{21} & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\, b_{12} + k\, b_{22} & = & 0 \\ 5\, b_{22} & = & 1 \end{cases}$$

Il sistema di sinistra determina la prima colonna della matrice $B$ mentre quello sulla destra determina la seconda colonna. Risolvendo i sistemi si ricava $B = \begin{bmatrix} 1/3 & -k/15 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$.

iii. In questo caso $A = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pertanto trovare $B$ tale che $AB = I$ equivale a risolvere i seguenti tre sistemi:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ognuno dei quali si può esplicitare in un sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} b_{11}+a\,b_{21}+c\,b_{31} &= 1 \\ b_{21}+b\,b_{31} &= 0 \\ b_{31} &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{12}+a\,b_{22}+c\,b_{32} &= 0 \\ b_{22}+b\,b_{32} &= 1 \\ b_{32} &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{13}+a\,b_{23}+c\,b_{33} &= 0 \\ b_{23}+b\,b_{33} &= 0 \\ b_{33} &= 1 \end{cases}$$

Da ciascuno dei sistemi qui sopra si ottengono gli elementi di una colonna della matrice $B$:

$$\begin{cases} b_{11} &= 1 \\ b_{21} &= 0 \\ b_{31} &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{12} &= -a \\ b_{22} &= 1 \\ b_{32} &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{13} &= ab-c \\ b_{23} &= -b \\ b_{33} &= 1 \end{cases}$$

Pertanto $B=\begin{bmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

iv. In questo caso semplice possiamo calcolare esplicitamente la matrice prodotto $AB$

$$AB=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a\,b_{11} & a\,b_{12} & a\,b_{13} \\ b\,b_{21} & b\,b_{22} & b\,b_{23} \\ c\,b_{31} & c\,b_{32} & c\,b_{33} \end{bmatrix}$$

Pertanto $AB=I$ se e solo se:

$$\begin{cases} a\,b_{11} &= 1 \\ b\,b_{21} &= 0 \\ c\,b_{31} &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\,b_{12} &= 0 \\ b\,b_{22} &= 1 \\ c\,b_{32} &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\,b_{13} &= 0 \\ b\,b_{23} &= 0 \\ c\,b_{33} &= 1 \end{cases}$$

Dal momento che $a,b,c \neq 0$ per ipotesi, segue che $\qquad B=\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{bmatrix}$

v. Si osserva che la matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ è costituita da quattro blocchi $2\times 2$ . I blocchi sulla diagonale

sono le sottomatrici $A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{bmatrix}$ $\quad A_2=\begin{bmatrix} 3 & b \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e gli altri due blocchi hanno tutti gli elementi nulli.

Si comprende allora che la matrice $A^{-1}$ inversa di $A$ è la matrice che ha sulla diagonale le sottomatrici

$A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ , $A_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & -b/12 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ e in conclusione si ha $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -b/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ .

# 7 Esempio di provetta - 18 settembre 2018

## 7.1 Esercizio (3p)

Sono dati i vettori $b=(2,4)$, $a_1=(3,-2)$, $a_2=(2,2)$ in $\mathbf{R}^2$.

i. (1p) Si scriva in forma matriciale l'enunciato: "$b$ è combinazione lineare di $a_1$ e $a_2$ con coefficienti $x_1$ e $x_2$".

ii. (1p) Si trovino le coppie $x=(x_1,x_2)$ tali che l'enunciato del punto i. è vero.

iii.(1p) Si faccia un disegno dei vettori $a_1$, $a_2$, $b$ e si dia una rappresentazione grafica dell'enunciato.

**Soluzione**

i.

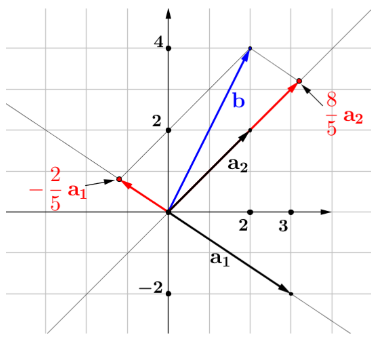
$$b=x_1a_1+x_2a_2 \iff \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

ii.

$$\left[\begin{array}{cc|c}3&2&2\\-2&2&4\end{array}\right] \iff \boxed{\frac{2}{3}r_1+r_2}\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}3&2&2\\0&\frac{10}{3}&\frac{16}{3}\end{array}\right]$$

L'unica soluzione è $\left(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}\right)$

iii.




## 7.2 Esercizio (4p)

Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{R}^4\to\mathbf{R}$ definita per ogni $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ da $f(x)=3x_1-x_2+2x_3$.

i. (1p ) Si scriva la definizione di funzione lineare e si verifichi che $f$ è una funzione lineare.

ii. (2p) Sia $V$ il nucleo di $f$, ossia l'insieme degli $x$ tali che $f(x)=0$. Si trovi una base di $V$.

iii. (1p) Si consideri il piano 3-dimensionale $\alpha=\{x\in\mathbf{R}^4|\, f(x)=6\}$. Si scriva una descrizione parametrica di $\alpha$.

**Soluzione**

i. Dati due spazi vettoriali $U,V$ su $\mathbf{R}$, una funzione $f:U\to V$ si dice *lineare* se $\forall x,y\in U, \forall\lambda\in\mathbf{R}$ si ha $f(x+y)=f(x)+f(y)$ e $f(\lambda x)=\lambda f(x)$. Verifichiamo che la funzione data è lineare:
$f(cx)=3cx_1-cx_2+2cx_3=c(3x_1-x_2+2x_3)=cf(x)$,
$f(x+y)=3(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+2(x_3+y_3)=(3x_1-x_2+2x_3)+(3y_1-y_2+2y_3)=f(x)+f(y)$

ii. Lo spazio $V$ è formato dalle soluzioni dell'equazione $3x_1-x_2+2x_3=0$. In questa equazione non compare la variabile $x_4$ che quindi è libera. Si possono poi prendere libere anche due delle tre variabili $x_1,x_2,x_3$. Scegliamo ad esempio $x_1$ e $x_3$ e otteniamo che $x_2=3x_1+2x_3$. Pertanto gli elementi di $V$ sono le quaterne del tipo
$(x_1,3x_1+2x_3,x_3,x_4)=(x_1,3x_1,0,0)+(0,2x_3,x_3,0)+(0,0,0,x_4)=$

$x_1\underbrace{(1,3,0,0)}_{\mathbf{u}}+x_3\underbrace{(0,2,1,0)}_{\mathbf{v}}+x_4\underbrace{(0,0,0,1)}_{\mathbf{w}}$ dove $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ sono evidentemente (perché?) una base di $V$.

iii. Si ha $\alpha = P+V$, ossia i punti di $\alpha$ sono tutti e soli quelli del tipo $P+t_1\mathbf{u}+t_2\mathbf{v}+t_3\mathbf{w}$, dove $P$ è una soluzione fissata a piacere dell'equazione $f(x)=6$. Per determinare $P$ possiamo prendere ad esempio $x_1=x_2=x_4=0$ e otteniamo $P=(0,-6,0,0)$.

## 7.3 Esercizio (10p)

Sia $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e sia $k \in \mathbf{R}$. Si consideri l'equazione vettoriale $AX = kX$ dove $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

i. (1p) Si verifichi che, per ogni $k$, l'insieme $V_k$ delle soluzioni $X$ dell'equazione $AX = kX$ è un sottospazio vettoriale dello spazio delle matrici colonna di tre elementi, che identifichiamo con $\mathbf{R}^3$.

ii. (5p) Si determinino i valori di $k$ per i quali $V_k = \{0\}$ e per gli altri valori di $k$ si trovi una base di $V_k$.

iii. (2p) Si consideri la funzione lineare $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ determinata da $A$ e si descriva l'insieme $\{g(t\mathbf{e_3}) \mid t \in \mathbf{R}\}$ ossia l'immagine attraverso $g$ dell'asse $x_3$.

iv. (2p) Si dia una interpretazione geometrica degli spazi $V_k$ in relazione alla funzione $g$.

**Soluzione**

Per verificare che $V_k$ è un sottospazio, occorre mostrare che, comunque presi $X,Y \in V_k$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, si ha $(X+Y) \in V_k$ e $\lambda X \in V_k$. Per fare questo cominciamo col ricordare che per il prodotto fra matrici e per il prodotto fra matrici e numeri valgono le proprietà distributiva e associativa. Pertanto, comunque presi $X,Y \in V_k$ si ha $A(X+Y) = AX+AY = kX+kY = k(X+Y)$ e ne segue $(X+Y) \in V_k$; inoltre, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ si ha $A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda(kX) = (\lambda k)X = k(\lambda X)$ e quindi $(\lambda X) \in V_k$.

ii. $V_k$ è l'insieme delle soluzioni dell'equazione vettoriale $AX = kX$ che si può scrivere

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{che equivale al sistema} \qquad \begin{cases} 4x_1 & & & = & kx_1 \\ x_1 & +4x_2 & & = & kx_2 \\ x_1 & & -x_3 & = & kx_3 \end{cases}$$

che a sua volta è equivalente al sistema omogeneo
$$\begin{cases} (4-k)x_1 & & & = & 0 \\ x_1 & +(4-k)x_2 & & = & 0 \\ x_1 & & +(-1-k)x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di quest'ultimo sistema costituiscono lo spazio $V_k$.
Si osserva ora che se $k$ è diverso da 4 e da $-1$, l'unica soluzione del sistema è il vettore nullo $0 = (0,0,0)$ e $V_k = \{0\}$.
Consideriamo il caso $k=4$: la prima equazione è $0=0$ e non dà informazioni; dalla seconda si ottiene $x_1=0$; dalla terza si ottiene $x_3=0$; dunque in questo caso lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo è costituito dai vettori del tipo $(0,x_2,0) = x_2(0,1,0)$ ossia è l'asse $x_2$; in altri termini $V_4$ è la retta generata dal vettore $\mathbf{e_2} = (0,1,0)$.
Consideriamo il caso $k=-1$: la prima equazione dice che $x_1=0$; dalla seconda si ottiene $x_2=0$; la terza è $0=0$ e non dà informazione; dunque in questo caso lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo è costituito dai vettori del tipo $(0,0,x_3) = x_3(0,0,1)$ ossia è l'asse $x_3$; in altri termini $V_{(-1)}$ è la retta generata dal vettore $\mathbf{e_3} = (0,0,1)$.

iii. Per ogni vettore $x = (0,0,x_3)$ dell'asse $x_3$ si ha

$$g(x) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

come si era peraltro già visto nel punto ii, poiché l'asse $x_3$ è lo spazio $V_{(-1)}$. Si vede quindi che l'immagine dell'asse $x_3$ attraverso $g$ è l'asse stesso.

iv. Per ogni punto $x$ che appartiene allo spazio $V_4$ (che è l'asse $x_2$), si ha $g(x) = AX = 4X$. Questo significa che sui punti di $V_4$ la funzione $g$ agisce come una *dilatazione* che moltiplica ogni vettore per 4. In particolare, la retta $V_4$ viene mandata in se stessa dalla funzione $g$.
Per ogni punto $x$ che appartiene allo spazio $V_{(-1)}$ (che è l'asse $x_3$), si ha $g(x) = AX = -X$. Questo significa che sui punti di $V_{(-1)}$ la funzione $g$ agisce come una moltiplicazione per -1, che inverte il verso dei vettori. In particolare, la retta $V_{(-1)}$ viene mandata in se stessa dalla funzione $g$.

## 7.4 Esercizio (8p)

i. (3p) Si scriva in forma matriciale il sistema a fianco e lo si trasformi in un sistema a scala equivalente usando l'algoritmo di Gauss.
ii. (3p) Si descriva in forma parametrica l'insieme delle soluzioni.

iii. (2p) Detta $A$ la matrice dei coefficienti del sistema, si trovi una base dello spazio $Y$ dei vettori $B$ tali che $AX = B$ ha soluzioni.

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & -x_2 & +6x_3 & -2x_4 & = & 3 \\ -8x_1 & -4x_2 & +18x_3 & -5x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & x_2 & -2x_3 & & = & 5 \end{cases}$$

**Soluzione**

i.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ -8 & -4 & 18 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right] \iff \begin{array}{c} \\ \boxed{r_1+r_2} \to \\ \boxed{4r_1+r_3} \to \\ \boxed{-r_1+r_4} \to \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right] \iff \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{-r_2+r_3} \to \\ \boxed{-r_2+r_4} \to \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ii. Il sistema a scala contiene soltanto due equazioni. Nella seconda equazione si può prendere $x_3 = t$ come parametro libero e in questo modo si determina $x_4 = 2t - 4$ in termini di $t$. Inserendo questi dati nella prima equazione si ottiene

$$2x_1 + x_2 - 4t + (2t - 4) = 1 \qquad \text{ossia} \qquad 2x_1 + x_2 - 2t = 5$$

dove si può prendere $x_1 = s$ come ulteriore parametro libero e si ha quindi $x_2 = 5 - 2s + 2t$.
In conclusione, l'insieme S delle soluzioni è descritto in forma parametrica da

$$\mathrm{S} = \left\{ (s,\, 5-2s+2t,\, t,\, 2t-4) \;\middle|\; s,t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ (0,5,0,-4) + s(1,-2,0,0) + t(0,2,1,2) \;\middle|\; s,t \in \mathbf{R} \right\}$$

e si vede da questa descrizione che si tratta di un piano ottenuto traslando con il vettore $P = (0,5,0,-4)$ il sottospazio 2-dimensionale che ha come base la coppia di vettori $\mathbf{u} = (1,-2,0,0)$, $\mathbf{v} = (0,2,1,2)$.

iii. Lo spazio $Y$ dei vettori $B \in \mathbf{R}^4$ tali che l'equazione vettoriale $AX = B$ ha soluzioni non è altro che lo spazio delle combinazioni lineari delle colonne della matrice $A$ dei coefficienti del sistema dato. Per trovare una base di tale sottospazio si guarda la matrice ridotta a scala e si vede quali sono le colonne dove si trovano i pivot: in questo caso sono la prima e terza colonna. Si prendono allora la prima e la terza colonna della matrice iniziale $A$:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 18 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e queste sono la base cercata di } Y.$$

*Vediamo ora perché. Non è difficile ed è un esercizio eccellente, ma ci vuole un po' di pazienza. Chiamiamo $C$ la matrice ridotta a scala. La matrice $C$ ha lo stesso spazio riga della matrice iniziale $A$; quindi ha lo stesso rango di $A$. Ma il rango di $C$ è uguale al numero di pivot di $C$, quindi il rango di $A$ è 2. Chiamiamo ora $Q$ la sottomatrice di $C$ costituita dalle colonne dove si trovano i pivot (in questo caso: la prima e terza colonna) e osserviamo che le colonne di $Q$ sono linearmente indipendenti. Sia inoltre $M$ la sottomatrice di $A$ costituita dalle corrispondenti colonne (la prima e la terza). Le matrici $M$ e $Q$ hanno lo stesso rango (per la stessa ragione, detta all'inizio, per cui $A$ e $C$ hanno lo stesso rango). Quindi anche le colonne di $M$ sono indipendenti. Dal momento che sono in numero uguale al rango, esse sono una base dello spazio colonna di $A$, che è $Y$.*

Anche se non era richiesto e anche se non è specificamente utile, osserviamo che $Y$ si può vedere anche come lo spazio vettoriale immagine dell'applicazione lineare associata alla matrice $A$.

## 7.5 Esercizio (8p)

Siano $W_1$ e $W_2$ i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^5$ : $W_1 = \left\{ \left(2a+c,\, a+3b+4c,\, -b+2c,\, -a+2b-c,\, a-b\right) \;\middle|\; a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$
$W_2$ generato dai vettori : $\mathbf{u} = (1,0,-1,0,1)$, $\mathbf{v} = (1,1,1,1,0)$ e $\mathbf{w} = (-1,2,0,5,4)$.

i. (4p) Determinare una base e la dimensione dello spazio $W_1$.

ii. (3p) Determinare la dimensione di $W_2$

iii. (1p) Dire se $W_1 + W_2$ è una somma diretta e perché.

**Soluzione**

i. Scriviamo la matrice che ha come colonne i vettori che generano lo spazio $W_1$ e, col metodo di eliminazione di Gauss, riduciamola a scala

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \boxed{-(1/2)r_1 + r_2} \to \\ \\ \boxed{(1/2)r_1 + r_4} \to \\ \boxed{-(1/2)r_1 + r_5} \to \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{(1/3)r_2 + r_3} \to \\ \boxed{-(2/3)r_2 + r_4} \to \\ \boxed{(1/3)r_2 + r_5} \to \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{19}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

In quest'ultima matrice vediamo che la sottomatrice quadrata formata dalle prime tre righe è triangolare e ha tutti i valori sulla diagonale che sono non nulli; quindi ha rango 3 e le tre colonne sono linearmente indipendenti (per vedere questo non era neppure necessario ridurre a scala le ultime due righe). Pertanto, anche la matrice di partenza ha lo stesso rango tre e le sue colonne sono indipendenti; in altre parole le tre colonne della matrice di partenza sono una base per lo spazio $W_1$, che ha dunque dimensione 3.

ii. Riduciamo a scala la matrice che ha come colonne i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{r_1 + r_3} \to \\ \\ \boxed{-r_1 + r_5} \to \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{-2r_2 + r_3} \to \\ \boxed{-r_2 + r_4} \to \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Vediamo che il rango della matrice ridotta a scala è tre e quindi anche la matrice iniziale. In altre parole lo spazio $W_2$ ha dimensione 3.

iii. Si dice che la somma di due sottospazi è diretta se e solo se la loro intersezione ha dimensione zero. In questo caso ciò è falso. Infatti, dalla formula di Grassmann si ha

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) = 6 - \dim(W_1 + W_2) \geq 6 - 5 = 1$$

dove si è usato il fatto che lo spazio $W_1 + W_2$ ha dimensione in ogni caso minore o uguale a 5, che è la dimensione dello spazio ambiente.

Osserviamo che nella particolare situazione del presente esercizio è stato facile vedere che l'intersezione degli spazi $W_1, W_2$ non è il sottospazio nullo. In generale la determinazione dell'intersezione di due sottospazi assegnati può essere più complessa.

**Università di Trento - Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e in Ingegneria Ambientale - 2015/16**

# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 8 foglio di esercizi - 30 aprile 2016

**Soluzione e commento della prova in itinere del 28 Aprile 2016 - Compito B**

### 8.1 Esercizio sistema lineare

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & +2x_4 & +5x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & -5x_3 & +8x_4 & +2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & -3x_2 & +x_3 & +2x_4 & -6x_5 & = & -2 \\ x_1 & -x_2 & +5x_3 & -4x_4 & -4x_5 & = & 2 \\ 5x_1 & -5x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +3x_5 & = & 10 \end{array}\right.$$

$(a)$ Si scriva in forma matriciale il sistema e lo si trasformi in un sistema a scala equivalente usando l'algoritmo di Gauss. **(3 punti)**

$(b)$ Descrivere in forma parametrica l'insieme delle soluzioni. **(3 punti)**

$(c)$ Indicata con $A$ la matrice dei coefficienti (o incompleta) del sistema, trovare una base dello spazio $Y$ dei vettori $B$ per i quali $AX = B$ ammette soluzioni. **(2 punti)**

**Soluzione**

$(a)$ Scriviamo la matrice completa associata al sistema e riduciamola a gradini:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & -3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & -5 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 2 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & 4 & -4 & 2 \\ 5 & -5 & 2 & 3 & 3 & 10 \end{array}\right] \iff \begin{array}{r} \\ \boxed{3r_1+r_2} \rightarrow \\ \boxed{3r_1+r_3} \rightarrow \\ \boxed{r_1+r_4} \rightarrow \\ \boxed{5r_1+r_5} \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & -3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 13 & 28 & 15 \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{-(8/14)\,r_2+r_3} \rightarrow \\ \boxed{(2/14)r_2+r_4} \rightarrow \\ \boxed{-(13/14)r_2+r_5} \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & -3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24}{7} & \frac{24}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{171}{14} & \frac{171}{14} \end{array}\right]$$

$$\iff \begin{array}{r} \\ \\ \\ \boxed{(24/5)r_3+r_4} \rightarrow \\ \boxed{(171/10)r_3+r_5} \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & -3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/7 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema a scala equivalente è

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & +2x_4 & +5x_5 & = & 1 \\ & & -14x_3 & +14x_4 & +17x_5 & = & 3 \\ & & & & -\frac{5}{7}x_5 & = & -\frac{5}{7} \end{array}\right.$$

$(b)$ Dal sistema a scala del punto $(a)$, con semplici passaggi algebrici, si ha che

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = & 1 \\ & & x_3 & -x_4 & & = & 1 \\ & & & & x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

Scegliamo, per esempio, le variabili $x_2 = t$ e $x_4 = s$ come parametri liberi e otteniamo che l'insieme S delle soluzioni del sistema è

$$\mathrm{S} = \left\{ (t-s+1, t, s+1, s, 1) \,\middle|\, t, s \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ (1,0,1,0,1) + t\,(1,0,0,0,0) + s\,(-1,0,1,1,0) \,\middle|\, t, s \in \mathbf{R} \right\}$$

$(c)$ Grazie alle riduzioni già effettuate sulla matrice completa al punto $(a)$ si ha che la matrice $A$ ridotta a scala ha i pivot sulla prima, sulla terza e quinta colonna:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto le colonne corrispondenti della matrice $A$ ossia i vettori colonna:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

risultano essere linearmente indipendenti e costituiscono una base dello spazio $Y$ .

## 8.2 Esercizio **combinazione lineare di due vettori e rappresentazione grafica**

Siano dati i vettori $v_1 = (-1, 2)$ , $v_2 = (3, 2)$ e $b = (1, 3)$ in $\mathbf{R}^2$ .

$(a)$ Scrivere in forma matriciale l'enunciato "*$b$ è combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$ con coefficienti $x_1$ e $x_2$*"; **(1 punto)**

$(b)$ Determinare le coppie $(x_1, x_2)$ per le quali l'enunciato del punto $(a)$ è vero; **(1 punto)**

$(c)$ Disegnare i vettori $v_1$ , $v_2$ , $b$ e interpretare graficamente l'enunciato. **(1 punto)**

**Soluzione**

$(a)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$(b)$ Possiamo rispondere a tale quesito sia risolvendo direttamente il sistema lineare $\left\{ \begin{array}{rrcl} -x_1 & +3x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & = & 3 \end{array} \right.$

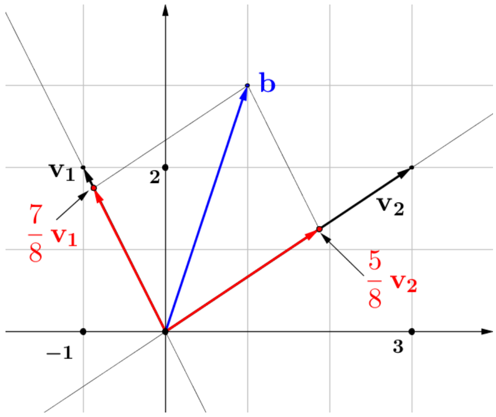
sia riducendo la matrice completa e poi passando al sistema lineare associato come segue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \iff \begin{array}{c} \\ \boxed{2r_1 + r_2} \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{array}\right] \iff \left\{ \begin{array}{rrcl} -x_1 & +3x_2 & = & 1 \\ & +8x_2 & = & 5 \end{array} \right.$$

L'unica soluzione risulta essere

$$x_1 = \frac{7}{8} \qquad x_2 = \frac{5}{8}$$

$(c)$




### 8.3 Esercizio soluzioni di una equazione lineare

Si consideri la funzione $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ che per ogni $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ è definita da $f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ .

$(a)$ Scritta la definizione di funzione lineare, scrivere che $f$ è lineare . **(1 punto)**

$(b)$ Trovare una base del nucleo di $f$ , definito come $\ker f = \{x \in \mathbf{R}^4 | f(x) = 0\}$ . **(2 punti)**

$(c)$ Considerato il piano 3-dimensionale $\pi = \{x \in \mathbf{R}^4 | f(x) = 2\}$ , se ne scriva una rappresentazione parametrica. **(1 punto)**

**Soluzione**

$(a)$ Una funzione $f: U \to V$ con $U$ e $V$ spazi vettoriali sullo stesso campo K , è lineare se

i. $f(p+q) = f(p) + f(q) \qquad \forall\, p,\, q \in U$

ii. $f(\alpha p) = \alpha f(p) \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{K}, \quad \forall\, p \in U$

Verifichiamo ora che $f$ è lineare.
$f(x+y) = 2(x_1+y_1) + 3(x_2+y_2) - (x_3+y_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2y_1 + 3y_2 - y_3 = f(x) + f(y)$ ;
$f(\lambda x) = 2(\lambda x_1) + 3(\lambda x_2) - (\lambda x_3) = \lambda(2x_1 + 3x_2 - x_3) = \lambda f(x)$ .

$(b)$ Si osserva che $\quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = 2x_1 + 3x_2$ . Pertanto

$\ker f = \{(x_1, x_2, 2x_1 + 3x_2, x_4) \in \mathbf{R}^4 | x_1, x_2, x_4 \in \mathbf{R}\} = \{x_1(1,0,2,0) + x_2(0,1,3,0) + x_4(0,0,0,1) \in \mathbf{R}^4 | x_1, x_2, x_4 \in \mathbf{R}\}$

Dunque i vettori: $\quad w_1 = (1,0,2,0)$ , $\quad w_2 = (0,1,3,0)$ , $\quad w_3 = (0,0,0,1)$ generano il nucleo $\ker g$ .
Inoltre si verifica immediatamente che tali vettori sono linearmente indipendenti e pertanto sono anche una base di $\ker g$ .

$(c)$ Si osserva che ogni punto $x \in \pi$ è del tipo $x = P + x_0$ dove $P$ è un punto particolare del piano $\pi$, diciamo ad esempio $P = (1,0,0,0)$ e $x_0$ è una soluzione generica dell'equazione omogenea $f(x) = 0$ cioè un elemento del $\ker f$ . Pertanto possiamo dire che

$$\pi = \{P + tw_1 + sw_2 + mw_3 \mid t, s, m \in \mathbf{R}\}$$

### 8.4 Esercizio autovalori e autospazi (senza dirlo)

Posto $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ , si consideri l'equazione vettoriale $AX = \lambda X$ .

$(a)$ Verificare che, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ , l'insieme $V_\lambda$ delle soluzioni dell'equazione $AX = \lambda X$ è uno spazio vettoriale. **(1 punto)**

$(b)$ Determinare i valori di $\lambda$ per i quali $V_\lambda = \{0\}$ , sottospazio vettoriale banale, e per gli altri valori di $\lambda$ trovare una base di $V_\lambda$ . **(5 punti)**

$(c)$ Considerare la funzione lilneare $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ determinata da $A$ e descrivere l'insieme $\{g(t\mathbf{e_1}) | t \in \mathbf{R}\}$, ossia l'immagine attraverso $g$ dell'asse $x_1$. **(2 punti)**

$(d)$ Interpretare dal punto di vista geometrico l'azione della funzione $g$ sui vettori degli spazi $V_\lambda$ non banali individuati in precedenza. **(2 punti)**

**Soluzione**

$(a)$ Siano $X, Y \in \mathbf{R}^3$ tali che $AX = \lambda X$ e $AY = \lambda Y$. Allora $A(X+Y) = AX + AY = \lambda X + \lambda Y = \lambda(X+Y)$; pertanto anche il vettore $X + Y \in V_\lambda$. Se invece $\alpha \in \mathbf{R}$, allora $A(\alpha X) = \alpha A(X) = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X)$ e pertanto $\alpha X \in V_\lambda$.
Dunque $V_\lambda$ è uno spazio vettoriale, precisamente un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.

$(b)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} (2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (-3-\lambda)x_2 = 0 \\ (2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi che in base al numero di zeri sulla diagonale (nessuno, uno, due), possiamo distinguere tre casi:

1. $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq -3$. In questo caso abbiamo sulla diagonale tutti coefficienti non nulli e l'unica soluzione del sistema è il vettore nullo pertanto in questo caso $V_\lambda = \{0\}$.

2. $\lambda = 2$. Si ha $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ pertanto le soluzioni di tale sistema saranno tutti e soli i vettori del tipo $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ con $x_1 \in \mathbf{R}$. Dunque una base di $V_2$ è il vettore $\mathbf{e_1}$.

3. $\lambda = -3$. In questo caso il sistema è

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

dunque le soluzioni di questo sistema sono tutti e soli i vettori del tipo $\begin{bmatrix} x_1 \\ -5x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ per $x_1 \in \mathbf{R}$.

Pertanto una base di $V_{-3}$ è data da $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$(c)$ L'immagine attraverso $g$ dell'asse $x_1$ è costituita dai punti $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ cioè è l'asse $x_1$ stesso.

$(d)$ Studiamo l'azione della funzione $g$ sui vettori dello spazio $V_2$. Si osserva che

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

questo significa che i vettori dello spazio $V_2$ venono dilatati di un fattore 2 dalla funzione $g$.
In modo analogo studiamo l'azione della funzione $g$ sui vettori di $V_{-3}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -5x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 \\ 15x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x_1 \\ -5x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè i vettori di $V_{-3}$ subiscono una dilatazione di un fattore 3 e inversione dell'orientamento.

### 8.5 Esercizio **dimensione e base di due spazi vettoriali e della loro somma**

Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^5$ :

$$V_1 = \text{span}\{(1,2,-1,0,1),\ (-1,0,1,2,1),\ (0,2,0,2,2)\}$$

$$V_2 = \{(2y+z, -3x+y+2z, x-y-z, x-y-z, 2x+2y) \mid x,y,z \in \mathbf{R}\}$$

$(a)$ Determinare una base e la dimensione di $V_1$ . **(3 punti)**

$(b)$ Calcolare la dimensione di $V_2$ . **(3 punti)**

$(c)$ Ricavare una base di $V_1 + V_2$ e dire se si tratta di una somma diretta e perché. **(2 punti)**

**Soluzione**

$(a)$ Per determinare la dimensione dello spazio $V_1$ conviene considerare una matrice $A$ che si ottiene disponendo per righe o per colonne i vettori che generano $V_1$ e poi ridurre tale matrice a scala. Il rango della matrice ridotta sarà uguale al rango della matrice iniziale $A$ e quindi sarà la dimensione dello spazio $V_1$ . Inoltre dalla matrice ridotta si hanno informazioni per determinare una base di $V_1$ . Nella matrice $A$ i vettori generatori si possono mettere in riga o in colonna; queste due opzioni sono equivalenti ma richiedono di operare in modo un po' diverso nei due casi, scriviamo quindi la soluzione in entrambi i modi.

*Primo modo: vettori in riga.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{c} \\ \boxed{r_1 + r_2} \to \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{c} \\ \\ \boxed{-r_2 + r_3} \to \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ridotta ha rango 2 e dunque lo spazio generato dalle righe, ossia $V_1$ , ha dimensione 2. Ricordiamo che operando sulle righe lo spazio generato dalle righe non cambia quindi i vettori

$$w_1 = (1,2,-1,0,1) \qquad\qquad w_2 = (0,2,0,2,2)$$

generano lo spazio $V_1$; d'altra parte $w_1, w_2$ sono evidentemente linearmente indipendenti e pertanto sono una base di $V_1$ .

*Secondo modo: vettori in colonna.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{c} \\ \boxed{-2r_1 + r_2} \to \\ \boxed{r_1 + r_3} \to \\ \\ \boxed{-r_1 + r_5} \to \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{c} \\ \\ \\ \boxed{-r_2 + r_4} \to \\ \boxed{-r_2 + r_5} \to \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice ridotta ha rango 2, quindi ha rango 2 anche la matrice iniziale e la dimensione di $V_1$ è $2$. In questo caso lo spazio generato dalle colonne non è detto che sia rimasto invariato però le due colonne della matrice ridotta dove si trovano i pivot, ossia la prima e la seconda, sono indipendenti, quindi anche le corrispondenti colonne della matrice iniziale sono indipendenti e necessariamente generano $V_1$ (poiché sappiamo già che la dimensione di $V_1$ è $2)$. In conclusione i vettori

$$u_1 = (1,2,-1,0,1), \qquad\qquad u_2 = (-1,0,1,2,1)$$

sono una base di $V_1$

$(b)$ Si osserva che

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(2y+z, -3x+y+2z, x-y-z, x-y-z, 2x+2y) \mid x,y,z \in \mathbf{R}\} \\ &= \{x(0,-3,1,1,2) + y(2,1,-1,-1,2) + z(1,2,-1,-1,0) \mid x,y,z \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

Dunque $V_2$ è l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori

$$(0,-3,1,1,2), \qquad (2,1,-1,-1,2), \qquad (1,2,-1,-1,0);$$

in altre parole, tali vettori generano lo spazio $V_2$ . Non è detto però che questi siano linearmente indipendenti. Per determinare la dimensione di $V_2$ e anche una base, possiamo procedere nei due modi già utilizzati nel punto $(a)$ .

*Primo modo: vettori in riga.*

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&-1&0\\2&1&-1&-1&2\\0&-3&1&1&2\end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \boxed{-2r_1+r_2}\to \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix}1&2&-1&-1&0\\0&-3&1&1&2\\0&-3&1&1&2\end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{-r_2+r_3}\to \end{array} \begin{bmatrix}1&2&-1&-1&0\\0&-3&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Vediamo che il rango della matrice ridotta, che è uguale al rango della matrice iniziale, è uguale a 2; pertanto si ha $\dim V_2 = 2$ e i vettori

$$w_3 = (1,2,-1,-1,0), \qquad w_4 = (0,-3,1,1,2)$$

sono linearmente indipendenti e costituiscono una base di $V_2$ .

*Secondo modo: vettori in colonna.*

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&-3\\-1&-1&1\\-1&-1&1\\0&2&2\end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \boxed{-2r_1+r_2}\to \\ \boxed{r_1+r_3}\to \\ \boxed{r_1+r_4}\to \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix}1&2&0\\0&-3&-3\\0&1&1\\0&1&1\\0&2&2\end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{(1/3)r_2+r_3}\to \\ \boxed{(1/3)r_2+r_4}\to \\ \boxed{(2/3)r_2+r_5}\to \end{array} \begin{bmatrix}1&2&0\\0&-3&-3\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

La matrice ridotta ha rango 2, quindi ha rango 2 anche la matrice iniziale e la dimensione di $V_2$ è $2$ . In questo caso lo spazio generato dalle colonne non è detto che sia rimasto invariato però le due colonne della matrice ridotta dove si trovano i pivot, ossia la prima e la seconda, sono indipendenti, quindi anche le corrispondenti colonne della matrice iniziale sono indipendenti e necessariamente generano $V_2$ (poiché sappiamo già che la dimensione di $V_2$ è $2$) . In conclusione i vettori

$$u_3 = (1,2,-1,-1,0), \qquad u_4 = (2,1,-1,-1,2)$$

sono una base di $V_2$

$(c)$ Lo spazio $V_1+V_2$ è una somma diretta se e solo se $\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1)+\dim(V_2) = 4$ . Ricordiamo che lo spazio $V_1+V_2$ è per definizione l'insieme di tutti i vettori del tipo $\lambda v_1 + \mu v_2$ dove $v_1 \in V_1$ , $v_2 \in V_2$ e $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Se nei punti precedenti abbiamo operato nel primo modo, ora sappiamo che lo spazio $V_1$ è generato dai vettori $w_1, w_2$ e che lo spazio $V_2$ è generato dai vettori $w_3, w_4$, pertanto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è un insieme di generatori di $V_1+V_2$. Per trovare la dimensione di $V_1+V_2$ riduciamo a scala la matrice che ha come righe i vettori generatori (in alternativa si potrebbero mettere i vettori in colonna) .

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&0&1\\0&2&0&2&2\\1&2&-1&-1&0\\0&-3&1&1&2\end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{-r_1+r_3}\to \\ \boxed{(3/2)r_2+r_4}\to \end{array} \begin{bmatrix}1&2&-1&0&1\\0&2&0&2&2\\0&0&0&-1&-1\\0&0&1&4&5\end{bmatrix} \iff \begin{array}{r} \\ \\ \boxed{r_4}\to \\ \boxed{r_3}\to \end{array} \begin{bmatrix}1&2&-1&0&1\\0&2&0&2&2\\0&0&1&4&5\\0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}$$

La matrice ha rango 4,quindi i vettori $w_1, w_2, w_3, w_4$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base di $V_1+V_2$ che pertanto ha dimensione $4$ . Dalla formula di Grassmann segue che:

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1+V_2) - \dim(V_1) - \dim(V_2) = 4-2-2 = 0$$

Si conclude quindi che lo spazio $V_1+V_2$ è somma diretta di $V_1$ e $V_2$ e si scrive $V_1 \oplus V_2$.

# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 9 foglio di esercizi - 22 maggio 2016

**esempi di funzioni lineari e matrici associate, parametrizzazioni lineari e cambiamenti di base, deformazioni lineari di uno spazio vettoriale**

### 9.1 Esercizio **funzioni lineari $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ - parametrizzazioni e deformazioni lineari del piano**

In questo esercizio studiamo le funzioni lineari da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ e le interpreteremo in diversi modi:

1. come *parametrizzazioni lineari* o *cambiamenti di base*;
2. come trasformazioni del piano in se stesso o *deformazioni lineari del piano*.

Entrambe le interpretazioni sono di notevole importanza per le applicazioni e le studieremo con l'obiettivo di imparare a utilizzare il linguaggio algebrico per descrivere oggetti e proprietà geometriche.

#### 9.1.1 Algebra

La situazione algebrica astratta che consideriamo è la seguente:

- consideriamo uno spazio vettoriale $\mathbf{R}^2_x$ nel quale la base standard è $\mathbf{e_1} = (1,0)$, $\mathbf{e_2} = (0,1)$ e l'elemento generico si denota $x = (x_1, x_2) = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2}$; i numeri $x_1, x_2$ sono le coordinate di $x$ rispetto alla base standard;
- sono dati due vettori $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ in $\mathbf{R}^2_x$, che per ipotesi sono linearmente indipendenti e generano $\mathbf{R}^2_x$, ossia: la coppia $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ è una base di $\mathbf{R}^2_x$; per fissare le idee e fare una rappresentazione grafica della situazione conviene considerare dei casi particolari, noi prenderemo ad esempio $\mathbf{c_1} = (2,-1)$, $\mathbf{c_2} = (1,3)$ e suggeriamo al lettore di fare per proprio conto altri esempi;
- consideriamo un altro spazio $\mathbf{R}^2_u$, nel quale chiamiamo $\epsilon_\mathbf{1} = (1,0)$, $\epsilon_\mathbf{2} = (0,1)$ la base standard e chiamiamo $u_1, u_2$ le coordinate di $u \in \mathbf{R}^2_u$ in tale base; in altri termini si ha $u = (u_1,u_2) = u_1\epsilon_\mathbf{1} + u_2\epsilon_\mathbf{2}$; consideriamo poi la funzione

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R}^2_u & \to & \mathbf{R}^2_x \\ & u & \mapsto & x = f(u) \end{array} \qquad \text{definita da} \qquad f(u) = u_1\mathbf{c_1} + u_2\mathbf{c_2}.$$

  L'ipotesi che $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ *generano* lo spazio $\mathbf{R}^2_x$ equivale a dire che ogni vettore $x \in \mathbf{R}^2_x$ si scrive *in qualche modo* come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ ; ne segue che la funzione $f$ è *surgettiva*, ossia l'immagine di $f$ è tutto $\mathbf{R}^2_x$.
  L'ipotesi che $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ sono *linearmente indipendenti* equivale a dire che ogni vettore $x \in \mathbf{R}^2_x$ si scrive in un *unico* modo come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ , ne segue che la funzione $f$ è *iniettiva*, ossia il nucleo $\ker f$ di $f$ è lo spazio nullo $\{0\}$.

- identifichiamo ciascuno dei vettori $x, u, \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$, con la matrice colonna corrispondente, ossia

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

  Il vettore $f(u)$ si identifica quindi con la matrice colonna

$$f(u) = u_1\mathbf{c_1} + u_2\mathbf{c_2} = u_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1 + u_2 \\ -u_1 + 3u_2 \end{bmatrix} \tag{9.1.1}$$

  Infine, quando li pensiamo come colonne, usiamo anche le lettere $X, U$ maiuscole per denotare i vettori $x$ e $u$

  e possiamo scrivere $X = f(u) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = AU$ , ossia: la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

rappresenta la funzione lineare $f$ rispetto alle basi standard di $\mathbf{R}^2_u$ e $\mathbf{R}^2_x$.

Osserviamo che le colonne di $A$ sono $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$.

Tutto quanto detto in questo numero si generalizza immediatamente agli spazi di dimensione $n$.

### 9.1.2 interpretazione della funzione $f$ come parametrizzazione lineare (ossia come cambiamento di coordinate); forma quadratica della metrica indotta nel piano dei parametri

i. Si rappresenti con un disegno lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2_x$ , ossia si disegnino un punto $O$ e due vettori applicati in $O$, ortogonali e della stessa lunghezza, che rappresentano la base standard $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ ; nello stesso disegno si rappresentino le rette generate dai vettori di base, ossia gli assi del sistema di riferimento. Nello stesso disegno si rappresentino i vettori $\mathbf{c_1} = (2,-1)$, $\mathbf{c_2} = (1,3)$. Con un altro disegno si rappresenti il piano $\mathbf{R}^2_u$ con la base $\epsilon_1, \epsilon_2$.

Vogliamo ora interpretare la funzione $f : \mathbf{R}^2_u \to \mathbf{R}^2_x$ e comprenderne il comportamento.
Si consideri il punto $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \in \mathbf{R}^2_u$ e sia $P = f(Q) \in \mathbf{R}^2_x$. Si rappresentino i punti $Q$ e $P$ nei disegni fatti in precedenza. Si vede che $P = \frac{1}{2}\mathbf{c_1} + \frac{1}{3}\mathbf{c_2}$ è la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ ottenuta prendendo come coefficienti la coppia $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. In altre parole la coppia $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ è la coppia delle coordinate di $f(Q)$ rispetto alla base $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$. In generale $x = f(u)$ è l'elemento di $\mathbf{R}^2_x$ che ha $u_1, u_2$ come coordinate rispetto alla base $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$.

In questa situazione si dice che la funzione $f$ è una *parametrizzazione* (lineare) di $\mathbf{R}^2_x$ a partire da $\mathbf{R}^2_u$. La variabile (vettoriale) $u$ si dice *parametro*. Ad ogni valore del parametro corrisponde un determinato punto $x \in \mathbf{R}^2_x$.

Ma è anche vero che per ogni punto $x \in \mathbf{R}^2_x$ c'è uno e un solo parametro $u \in \mathbf{R}^2_u$ tale che $f(u) = x$; la funzione che manda $x$ in $u$ è la funzione inversa $f^{-1}$, che è rappresentata dalla matrice inversa $A^{-1}$, infatti

$$u = f^{-1}(x) \iff x = f(u) \iff X = AU \iff A^{-1}X = U$$

La funzione $f^{-1}$ associa ad ogni punto $x = (x_1, x_2)$ le sue coordinate $u = (u_1, u_2)$ nella base $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$. Le matrici $A$ e $A^{-1}$ si dicono matrici del cambiamento di coordinate.

Riassumendo: data una base $\mathrm{B} = \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ in $\mathbf{R}^2_x$, per ogni vettore di $\mathbf{R}^2_x$, le coordinate $U$ nella base $\mathrm{B}$ si ottengono dalle coordinate $X$ nella base standard con la formula $\quad U = A^{-1}X \quad$ dove $A$ è la matrice che ha come colonne le coordinate standard dei vettori $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$.

ii. Si scriva la matrice $A^{-1}$ nel caso particolare $\mathbf{c_1} = (2,-1)$, $\mathbf{c_2} = (1,3)$. Si usi tale matrice per determinare le coordinate $u$ dei punti $(1,0), (0,1), (-1,4)$ in $\mathbf{R}^2_x$. Si rappresentino tali punti sul disegno come combinazioni lineari della base $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$.

iii. Sia $r$ una retta in $\mathbf{R}^2_u$ e sia $s = f(r) \subset \mathbf{R}^2_x$ l'immagine di $r$ attraverso la funzione $f$. Si mostri che $f(r)$ è una retta. In questa situazione si dice che la retta $r$ rappresenta nello spazio dei parametri la retta $s$.
- Si trovi la retta $s = f(r)$ sapendo che $r$ ha equazione parametrica $(3t-1, t+1)$.
- Si trovi la retta $r$ in $\mathbf{R}^2_u$ che rappresenta la retta $s$ passante per i punti $(0,0)$, $(2,6)$ in $\mathbf{R}^2_x$.

iv. Nello spazio dei parametri $\mathbf{R}^2_u$, si consideri l'insieme $H = \{u \mid 0 \le u_1 \le 1,\ 0 \le u_2 \le 1\}$. L'insieme $H$ si dice comunemente *quadrato standard* in $\mathbf{R}^2$. Si mostri che l'insieme $f(H) = \{f(u) \mid u \in H\} \subset \mathbf{R}^2_x$, ossia l'immagine di $H$ attraverso $f$, è il parallelogramma che ha come vertici i punti $O, \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_1} + \mathbf{c_2}$; questo parallelogramma si dice comunemente *parallelogramma generato dai vettori* $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$.

v. Nello spazio dei parametri $\mathbf{R}^2_u$, si consideri l'insieme $T = \{u \mid 0 \le u_1,\ 0 \le u_2,\ u_1 + u_2 \le 1\}$. L'insieme $T$ si dice comunemente *triangolo standard* in $\mathbf{R}^2$. Si mostri che l'insieme $f(T) \subset \mathbf{R}^2_x$, è il triangolo che ha vertici $O, \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$; tale triangolo si dice comunemente *triangolo generato dai vettori* $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$.

vi. Sia $f$ come in (9.1.1). Consideriamo la funzione $g : \mathbf{R}^2_u \to \mathbf{R}$ che ad ogni $u = (u_1, u_2)$ associa il numero $g(u) = \|f(u)\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ dove $x = f(u) \in \mathbf{R}^2_x$; in altri termini $g(u)$ è il quadrato della lunghezza euclidea standard del vettore $x$ che ha coordinate $u_1, u_2$ rispetto alla base $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$. Si scriva una formula che esprima $g(u)$ in termini delle coordinate $u_1, u_2$ e si osservi che si ottiene un polinomio omogeneo di secondo grado nelle indeterminate $u_1, u_2$ del tipo $g(u) = au_1^2 + bu_1u_2 + cu_2^2$. Un polinomio di questo tipo si dice *forma quadratica*.

vii. Si scriva il numero $g(u) = \|f(u)\|^2$ nella forma $\qquad g(u) = U^TGU = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

dove $X$ è la matrice colonna associata a $x$ e $G$ è una opportuna matrice simmetrica, ossia tale che $g_{12} = g_{21}$. Si dice che la matrice $G$ rappresenta la forma quadratica $g$. Infine si scriva la matrice $G$ in termini della matrice $A$ che rappresenta $f$.

viii. Sia $C$ la *circonferenza* di raggio 1 e centro nell'origine nello spazio $\mathbf{R}^2_x$, ossia $C = \{x \in \mathbf{R}^2_x \mid \|x\|^2 = 1\}$. Sia inoltre $D$ il *cerchio* (o *disco*, o *palla*) di raggio 1 e centro nell'origine nello spazio $\mathbf{R}^2_x$, ossia $D = \{x \in \mathbf{R}^2_x \mid \|x\|^2 \le 1\}$. Si dia una descrizione analitica dell'insieme $C^* \subset \mathbf{R}^2_u$ che rappresenta nello spazio dei parametri la circonferenza $C$, ossia l'insieme tale che $f(C^*) = C$. Si faccia altrettanto per l'insieme $D^*$ che rappresenta il cerchio $D$. Si rappresentino tali insiemi con un disegno.

### 9.1.3 interpretazione della funzione $f$ come trasformazione lineare di un piano in se stesso

Vogliamo ora interpretare la funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ come una trasformazione lineare di un piano in se stesso. Consideriamo allora un piano euclideo $\alpha$ con un sistema di riferimento ortonormale fissato e identifichiamolo con lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ con la base standard $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$. Pensiamo poi che che $u = (u_1, u_2)$ siano le coordinate di un generico punto $Q$ del piano, rispetto alla base standard, e pensiamo che $x = (x_1, x_2) = f(u)$ siano le coordinate, sempre nella stessa base, di un punto $P$ dello stesso piano. In questo modo la funzione $f$ determina una trasformazione del piano in sè, che manda il punto $Q$ nel punto $P$. Osserviamo che i vettori della base standard vengono mandati nei vettori $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ e il quadrato standard $H$ viene mandato nel parallelogramma generato da $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$.
*Vogliamo sottolineare la differenza tra l'interpretazione che si sta dando della funzione f nella presente sezione 9.1.3 e l'interpretazione data nella precedente sezione* 9.1.2. Nella sezione presente la funzione $f$ si pensa come uno *spostamento di punti da una posizione all'altra nel piano*, che quindi si può usare per modellizzare lo spostamento di una figura, il quale può essere ad esempio un *movimento rigido* (rotazione, simmetria) oppure una *deformazione* della figura stessa. Invece nella sezione precedente i punti del piano $\mathbf{R}^2_x$ *restano fermi* e la funzione $f$ manda le coordinate $u$ del punto $P$ rispetto a una certa base $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$ nelle coordinate dello stesso punto $P$ rispetto alla base standard; ossia $f$ si pensa come un cambiamento di base, che equivale a dare una una parametrizzazione lineare dello spazio.

i. Si mostri che l'immagine attraverso $f$ di una retta è una retta, l'immagine di un segmento è un segmento e l'immagine di un triangolo è un triangolo. Si mostri inoltre che rette parallele vengono mandate in rette parallele e parallelogrammi in parallelogrammi. Invece, come vedremo meglio nel seguito, non è detto che l'immagine di un rettangolo sia un rettangolo, nè che l'immagine di un cerchio sia un cerchio.

ii. Si rappresenti graficamente l'esagono regolare $E$ che ha centro nell'origine e ha un vertice nel punto $\mathbf{e_1}$. Si descriva analiticamente e si rappresenti graficamente l'insieme $f(E)$. Si trovi l'area dell'insieme $f(E)$.

iii. Si rappresenti graficamente la circonferenza $C \subset \mathbf{R}^2$ di raggio 1 che ha centro nell'origine. Si dia una descrizione analitica dell'insieme $f(C)$ e lo si rappresenti con un disegno. Si faccia altrettanto per l'insieme $f(D)$, dove $D$ è il cerchio di raggio 1 e centro nell'origine.

iv. Si confronti l'insieme $f(C)$ con l'insieme $C^*$, , introdotto nel punto vii della sezione 9.1.2, che rappresenta la circonferenza $C$ nello spazio dei parametri $(u_1, u_2)$, ossia in termini delle coordinate $(u_1, u_2)$ rispetto alla base $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$. Si osservi che sono entrambi ellissi e si trovi la relazione fra di esse.

### 9.1.4 Come si trasformano le lunghezze e gli angoli - misure della deformazione

Come nella precedente sezione, consideriamo una trasformazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ e interpretiamola come un movimento o deformazione delle figure nel piano. In questa sezione vogliamo comprendere come si può descrivere il cambiamento che la trasformazione produce nelle lunghezze e negli angoli e come si può misurare la quantità di deformazione. Inoltre vogliamo caratterizzare le trasformazioni lineari che non producono deformazione, ossia le isometrie; in particolare vedremo che la funzione $f$ è una isometria se e solo se manda basi ortonormali in basi ortonormali e questo equivale a dire che la matrice $A$ associata ad $f$ rispetto a una base ortonormale verifica $A^T A = I$, che è la definizione di matrice ortogonale. Insomma: le matrici ortogonali rappresentano (in una base ortonormale) le isometrie lineari.

i. Dati due vettori $u, v \in \mathbf{R}^2$, poniamo $\psi(u, v) = f(u) \cdot f(v)$ e consideriamo la funzione $\psi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ che manda ogni coppia di vettori $u, v$ nel numero $\psi(u, v)$.
Si osservi che
$$\psi(u, v) = f(u) \cdot f(v) = V^T G U = U^T G V \tag{9.1.2}$$
dove $U, V$ sono le matrici colonna associate ai vettori $u, v$ e $G = A^T A$, essendo $A$ la matrice associata alla funzione $f$ nella base standard, ossia la matrice che ha come colonne i vettori $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$.
Si osservi che $G$ è una matrice simmetrica e si verifichi che la funzione $\psi$ è un prodotto scalare su $\mathbf{R}^2$.
Si osservi inoltre che $g(u) = \psi(u, u)$ è la forma quadratica rappresentata dalla matrice $G$ che abbiamo introdotto nella sezione 9.1.2.

ii. Diciamo che una trasformazione $f$ è una *isometria* se lascia invariato il prodotto scalare, ossia se $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$ per ogni coppia di vettori $u, v$ in $\mathbf{R}^2$. Evidentemente una isometria non modifica la lunghezza dei vettori e gli angoli.

La definizione di isometria e tutto quanto si dice in questa sezione si estende in modo evidente a $\mathbf{R}^n$.

Si mostri che i seguenti enunciati sono equivalenti fra loro:

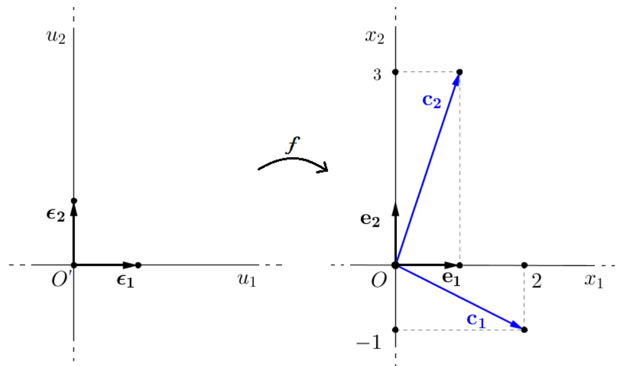
1. la funzione $f$ non modifica il prodotto scalare, ossia $$u \cdot v = f(u) \cdot f(v) \qquad \forall u, v \in \mathbf{R}^2 \tag{9.1.3}$$
2. la funzione $f$ non modifica la lunghezza dei vettori, ossia $$\|u\| = \|f(u)\| \qquad \forall u \in \mathbf{R}^2 \tag{9.1.4}$$
3. i vettori $f(\mathbf{e_1})$, $f(\mathbf{e_2})$ sono una base ortonormale (9.1.5)
4. la matrice $A$ che rappresenta $f$ è una matrice ortogonale; (9.1.6)
5. la matrice $G$ è la matrice identiitàà (9.1.7)
6. vale che $g(u) = u_1^2 + u_2^2$. (9.1.8)

iii. Se la matrice $G$ non è uguale alla matrice identità $I$ allora lo scostamento di $G$ da $I$ è la *deformazione* prodotta dalla trasformazione $f$. Una possibile *misura della deformazione* si ottiene considerando la matrice $E = \frac{1}{2}(G - I)$, che si chiama in vari modi: *Tensore di deformazione di Green* (si veda ad esempio `https://it.wikipedia.org/wiki/Deformazione`), oppure *Lagrangian finite strain tensor*, *Green-Lagrangian strain tensor*, *Green-St.Venant strain tensor* (si veda ad esempio `https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_strain_theory`).

**Soluzione**

9.1.2

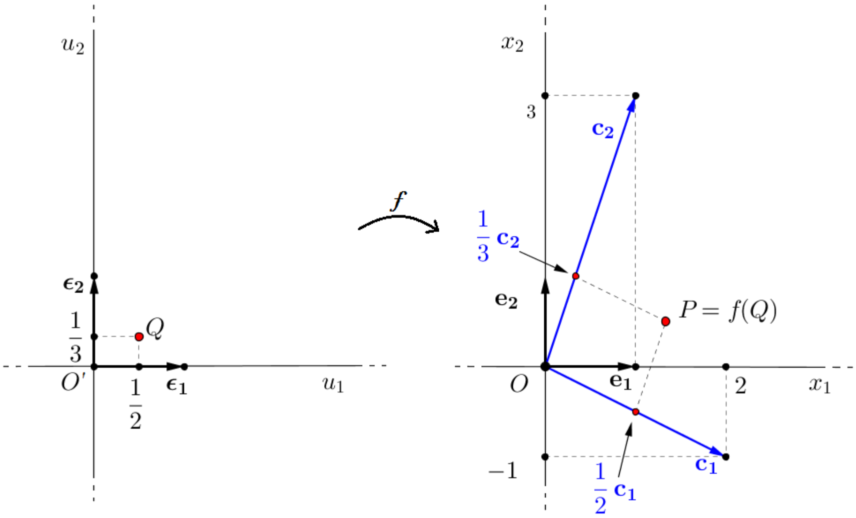
i. Nella figura sotto a destra si vede rappresentato il piano $\mathbf{R}^2_x$ con la base standard $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ e i vettori $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$. Invece a sinistra si vede lo spazio $\mathbf{R}^2_u$ con la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Osserviamo che si ha $\mathbf{c_1} = f(\epsilon_1)$, $\mathbf{c_2} = f(\epsilon_2)$.




Per capire il significato della funzione $f$, nella figura sotto a sinistra aggiungiamo il punto $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbf{R}^2_u$.
A destra disegniamo invece il punto

$$P = f(Q) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbf{R}^2_u = f\left(\frac{1}{2}\epsilon_1 + \frac{1}{3}\epsilon_2\right) = \frac{1}{2}f(\epsilon_1) + \frac{1}{3}f(\epsilon_2) = \frac{1}{2}\mathbf{c_1} + \frac{1}{3}\mathbf{c_2}$$

e *vediamo* che la funzione $f$ manda la coppia $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbf{R}^2_u$ nel punto $P$ di cui $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \in \mathbf{R}^2_u$ sono le coordinate rispetto alla base $\{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$.




La figura sopra rappresenta la formula algebrica (9.1.1) nel caso particolare di $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. In generale possiamo pensare la funzione $f$ come segue:

*per ogni $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2_u$, l'immagine $f(u)$ è il punto in $\mathbf{R}^2_x$ che ha coordinate $u_1, u_2$ rispetto alla base $\{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$.*

Dal fatto che $\{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$ è una base segue che la funzione $f$ è invertibile, quindi per ogni punto $P$ c'è uno ed un solo valore $u = f^{-1}(P)$ a cui corrisponde $P$. In questa situazione si dice che:

- $u$ è un *parametro* che identifica $P$;
- lo spazio $\mathbf{R}^2_u$ è lo spazio dei parametri;
- la funzione $f$ è una *parametrizzazione* lineare di $\mathbf{R}^2_x$ a partire da $\mathbf{R}^2_u$.

Lo spazio dei parametri è una specie di “carta geografica" nella quale noi rappresentiamo il piano $\mathbf{R}^2_x$.
Mediante un cammino o una figura sulla carta geografica possiamo rappresentare un cammino o una figura nel piano $\mathbf{R}^2_x$.
Osserviamo infine che, con le notazioni del punto 9.1.1, se $X = AU$, dove $X$ è la colonna delle coordinate di $P$ rispetto alla base standard di $\mathbf{R}^2_x$ e $U$ è la colonna delle coordinate di $P$ nella base $\{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$, allora si ha $U = A^{-1}X$.

ii. Ricordiamo che l'inversa di una matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ è la matrice $A^{-1} = \dfrac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$.

Pertanto, nel nostro caso, l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ è la matrice $A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Dunque si ha $\quad U = A^{-1}X = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad$ ossia:

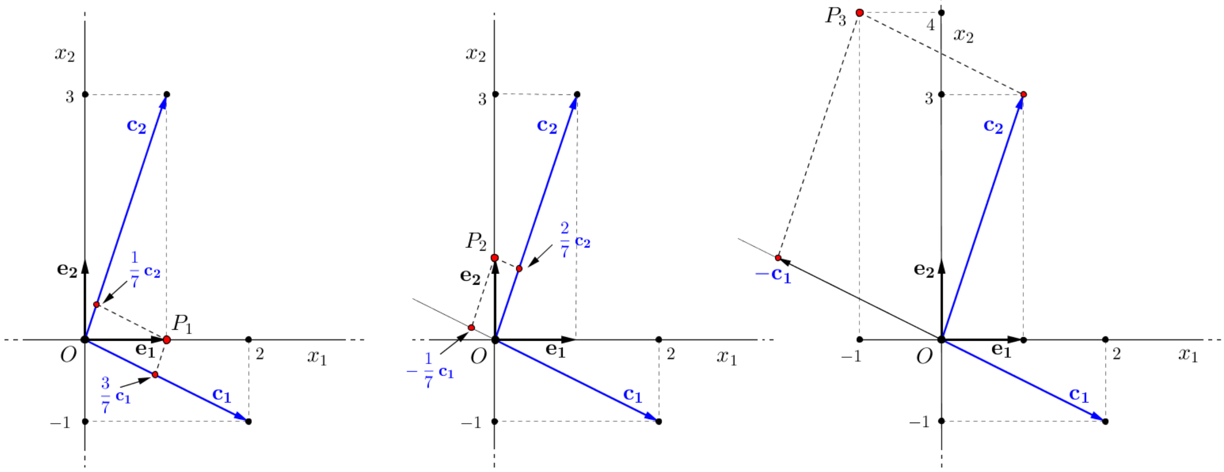
*la matrice $A^{-1}$, moltiplicata per la colonna $X$ delle coordinate standard di un vettore, produce la colonna $U$ delle coordinate dello stesso vettore nella nuova base $\{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$.*

Usiamo ora la matrice $A^{-1}$ per calcolare le coordinate dei punti $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (0,1)$, $P_3 = (-1,4)$ rispetto alla base $\{\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}\}$:

$$\begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} \Longrightarrow P_1 = \frac{3}{7}\mathbf{c_1} + \frac{1}{7}\mathbf{c_2} \qquad \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 \\ 2/7 \end{bmatrix} \Longrightarrow P_2 = -\frac{1}{7}\mathbf{c_1} + \frac{2}{7}\mathbf{c_2}$$

$$\begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow P_3 = -\mathbf{c_1} + \mathbf{c_2}$$

Nella figura sotto, da sinistra a destra, sono rappresentati i punti $P_1, P_2$ e $P_3$ come combinazioni lineari della base $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$, utilizzando appunto le coordinate appena calcolate.




iii. Consideriamo una qualsiasi retta $r = \{R + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbf{R}\}$, dove $\mathbf{w} \neq 0$, che passa per un punto $R$ e ha la direzione del vettore $\mathbf{w}$ (o meglio ha come direzione la retta generata da $\mathbf{w}$). Per ogni punto $P = R + t\mathbf{w}$ di $r$, grazie alla linearità di $f$ si ha $f(P) = f(R + t\mathbf{w}) = f(R) + tf(\mathbf{w})$ e si vede quindi che **l'immagine $f(r)$ della retta $r$ è ancora una retta, che passa per il punto $f(R)$ e ha la direzione del vettore $f(\mathbf{w})$** (questo naturalmente richiede che $f(\mathbf{w}) \neq 0$, cosa che nel nostro caso è vera per ogni $\mathbf{w} \neq 0$, poichè la funzione $f$ è iniettiva).
Una ovvia, ma notevole, conseguenza di quanto appena detto è che *le immagini di due rette parallele sono ancora parallele*, infatti due rette $r_1, r_2$, rispettivamente di equazione $P_1 + t\mathbf{w_1}$ e $P_2 + t\mathbf{w_2}$, sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione, ossia se i vettori $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$ sono allineati, cioè se vale $\mathbf{w_2} = k\mathbf{w_1}$. Ma questo avviene se e solo se $f(\mathbf{w_2}) = kf(\mathbf{w_1})$, ossia se le rette $f(r_1)$ e $f(r_2)$ sono parallele. Da notare che *le immagini di rette perpendicolari non sono in generale perpendicolari* (ad esempio gli assi di $\mathbf{R}^2_u$ vanno nelle rette generate dai vettori $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$), che non sono ortogonali. Insomma: la relazione di parallelismo fra rette è invariante rispetto alle trasformazioni lineari, mentre la relazione di ortogonalità fra rette non è invariante in generale (vedremo sotto che l'ortogonalità è invariante se e solo se la trasformazione lineare è anche una isometria).

Nel caso particolare della retta $r$ assegnata nel primo pallino si ha

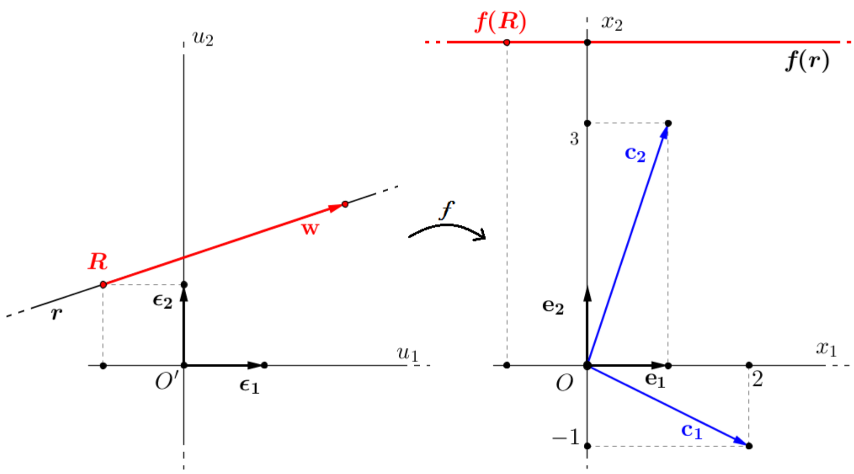
$$r = \{(3t-1, t+1) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{(-1,1) + t(3,1) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{R + t\mathbf{w} \mid t \in \mathbf{R}\}, \text{ dove } R = (-1,1) \text{ e } \mathbf{w} = (3,1).$$

Pertanto, ricordando quanto si è detto appena sopra, la retta $f(r)$ passa per il punto

$$f(R) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e ha la direzione del vettore } f(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Insomma, l'insieme $f(r)$ è la retta passante per il punto $(-1,4)$ e parallela all'asse $x_1$.

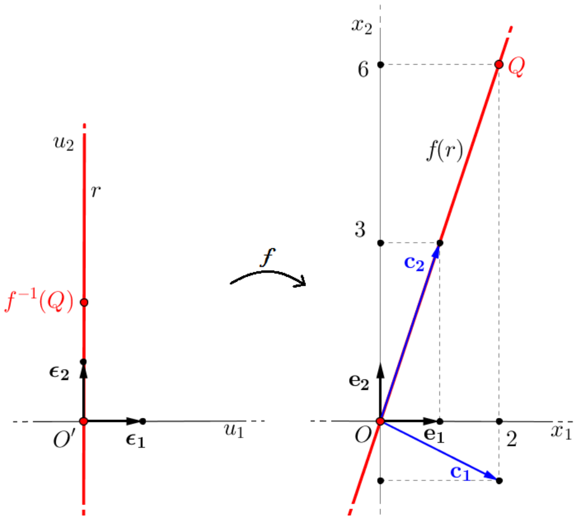
Nella figura sotto si vede rappresentata la situazione appena discussa: alla retta $r$ nello spazio dei parametri corrisponde la retta $f(r)$ nel piano $\mathbf{R}^2_x$.



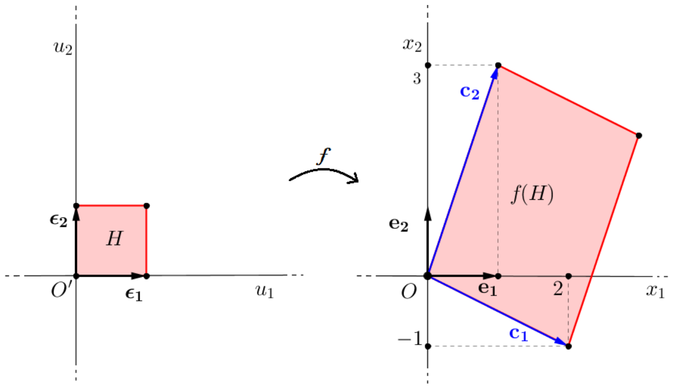

Passiamo ora al secondo pallino del punto v. nel quale viene assegnata la retta $s$ in $\mathbf{R}^2_x$ che passa per i punti $O = (0,0)$ e $Q = (2,6)$ e si vuole determinare la retta $r$ che rappresenta $s$ nello spazio dei parametri $\mathbf{R}^2_u$. In altre parole si vuole trovare $r$ tale che $f(r) = s$. Sapendo che i punti $O$ e $Q$ appartengono a $s = f(r)$, e sapendo che la funzione $f$ è biiettiva, vediamo che la retta $r$ passa per i punti $f^{-1}(O)$ e $f^{-1}(Q)$, ossia i punti nello spazio dei parametri che rappresntano $O$ e $Q$. Ovviamente si ha $f^{-1}(O) = (0,0)$ , inoltre

$$f^{-1}(Q) = A^{-1}X = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

quindi la retta $r$ è l'asse $u_2$ . In effetti il calcolo non era necessario, bastava accorgersi che $Q = (2,6) = 2\mathbf{c_2}$ . Nella figura seguente vediamo rappresentata la situazione.



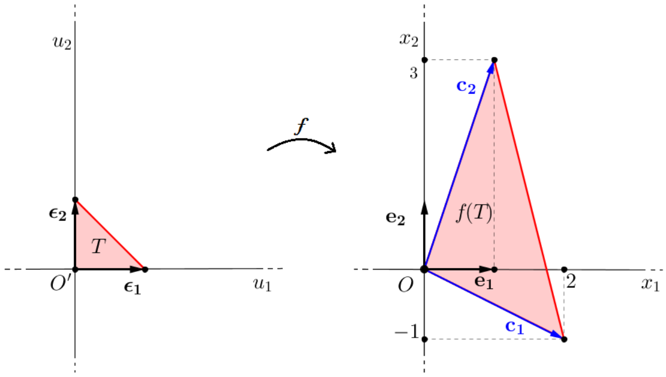

iv. Nella figura sotto a sinistra si vede rappresentato il quadrato standard $H$ e a destra la sua immagine tramite $f$.




Lo studente cerchi di visualizzare come i punti del quadrato $H$ vengono mandati nell'insieme $f(H)$, ad esempio:

- i vertici vanno nei vertici; vertici adiacenti vanno in vertici adiacenti, vertici opposti vanno in vertici opposti;
- il lato di estremi $O$ e $\epsilon_1$ va nel lato di estremi $O$ e $\mathbf{c_1}$; ogni lato va in un lato; lati paralleli vanno in lati paralleli;
- le diagonali vanno nelle diagonali, i punti medi dei lati vanno..., il baricentro va...

v. Nella figura sotto a sinistra si vede rappresentato il triangolo standard $T$ e a destra la sua immagine tramite $f$.




Si visualizzi mentalmente come i punti di $T$ vanno nei punti di $f(T)$. Ad esempio: ogni punto $P$ del lato opposto all'origine va in un punto $f(P)$ del lato opposto all'origine; ogni segmento $OP$ va nel segmento di estremi $O$ e $f(P)$; ecc...

vi. Sia $f$ come in (9.1.1) e, come richiesto, consideriamo la funzione $g : \mathbf{R}^2_u \to \mathbf{R}$ che ad ogni $u = (u_1, u_2)$ associa il numero $g(u) = \|f(u)\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ dove $x = f(u) \in \mathbf{R}^2_x$. Vogliamo scrivere una formula che esprima $g(u)$ in termini delle coordinate $u_1, u_2$. Per far questo, come nella (9.1.1), scriviamo

$$u = u_1\epsilon_1 + u_2\epsilon_2 \qquad \text{e} \qquad f(u) = f(u_1\epsilon_1 + u_2\epsilon_2) = u_1 f(\epsilon_1) + u_2 f(\epsilon_2)$$

Ne segue che

$$g(u) = \|f(u)\|^2 = f(u)\cdot f(u) = [u_1 f(\epsilon_1) + u_2 f(\epsilon_2)]\cdot[u_1 f(\epsilon_1) + u_2 f(\epsilon_2)] =$$

$$= u_1^2\,[f(\epsilon_1)\cdot f(\epsilon_1)] + 2u_1u_2\,[f(\epsilon_1)\cdot f(\epsilon_2)] + u_2^2\,[f(\epsilon_2)\cdot f(\epsilon_2)] =$$

$$= u_1^2\,a + u_1u_2\,b + u_2^2\,c$$

dove si è posto

$$a = [f(\epsilon_1)\cdot f(\epsilon_1)] \qquad b = 2[f(\epsilon_1)\cdot f(\epsilon_2)] \qquad c = [f(\epsilon_2)\cdot f(\epsilon_2)]$$

Nell'esempio particolare che abbiamo preso come esempio si ha $f(\epsilon_1) = \mathbf{c_1} = (2, -1)$ e $f(\epsilon_2) = \mathbf{c_2} = (1, 3)$, quindi

$$a = \|\mathbf{c_1}\|^2 = 5 \qquad b = 2\mathbf{c_1}\cdot\mathbf{c_1} = -2 \qquad \|\mathbf{c_2}\|^2 = 10$$

e in conclusione si ha

$$g(u) = 5u_1^2 - 2u_1u_2 + 10u_2^2 \tag{9.1.9}$$

Vediamo che la funzione $g(u)$ si esprime come un polinomio di secondo grado omogeneo[4] nelle variabili $u_1, u_2$ e si dice che è una *forma quadratica* nelle variabili $u_1, u_2$, o anche una forma quadratica su $\mathbf{R}^2_u$. La forma quadratica $g(u)$ consente di calcolare la lunghezza di un vettore $x$ nel piano $\mathbf{R}^2_x$ in termini delle coordinate $u = (u_1, u_2)$ che lo rappresentano nella base $\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}$. Si dice che la forma quadratica $g$ è la *prima forma fondamentale* associata alla parametrizzazione lineare $f$. Una generalizzazione di questo concetto alle parametrizzazioni non lineari di una superficie curva, per le quali la prima forma fondamentale varia da punto a punto, si troverà nel corso di Analisi 2 e si applicherà alla cartografia nel corso di Topografia. La prima forma fondamentale è stata utilizzata in particolare da Gauss all'inizio dell'Ottocento nelle sue ricerche sulla geometria differenziale e sulla curvatura delle superfici 2-dimensionali. Da queste ricerche sono partite le idee di Riemann sulla geometria degli spazi curvi n-dimensionali, che è stata poi utilizzata da Einstein per formulare la teoria della relatività generale. Tale teoria ha previsto l'esistenza dei buchi neri e delle onde gravitazionali, recentemente osservate per la prima volta, e viene utilizzata regolarmente nei sistemi di Global Positioning (fra gli innumerevoli materiali disponibili in rete sui navigatori GPS si può vedere ad esempio la seguente esposizione divulgativa `https://web.infn.it/fisicainbarca2011/images/stories/genova/gps_pallavicini.pdf`)

[4] Omogeneo, nel senso che tutti i termini sono dello stesso grado.

vii. Si verifica immediatamente che vale

$$g(u) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = U^T G U \tag{9.1.10}$$

dove

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\epsilon_\mathbf{1}) \cdot f(\epsilon_\mathbf{1})] & f(\epsilon_\mathbf{1}) \cdot f(\epsilon_\mathbf{2}) \\ f(\epsilon_\mathbf{1}) \cdot f(\epsilon_\mathbf{2}) & f(\epsilon_\mathbf{2}) \cdot f(\epsilon_\mathbf{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{c_1}\|^2 & \mathbf{c_1} \cdot \mathbf{c_2} \\ \mathbf{c_1} \cdot \mathbf{c_2} & \|\mathbf{c_2}\|^2 \end{bmatrix} \tag{9.1.11}$$

è una matrice simmetrica poichè il prodotto scalare è simmetrico e quindi $f(\epsilon_\mathbf{1}) \cdot f(\epsilon_\mathbf{2}) = f(\epsilon_\mathbf{2}) \cdot f(\epsilon_\mathbf{1})$. È anche evidente che $G = A^T A$ dove $A$ è la matrice che rappresenta $f$. Infatti la prima riga di $A^T$ è uguale alla prima colonna di $A$ che è la colonna delle coordinate del vettore $\mathbf{c_1}$, e la seconda riga di $A^T$ è uguale alla seconda colonna di $A$, che è la colonna delle coordinate del vettore $\mathbf{c_2}$. Nel caso particolare che abbiamo preso come esempio si ha

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \qquad\qquad g(u) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

viii. Vogliamo trovare una descrizione analitica dell'insieme $C^*$, contenuto nello spazio $\mathbf{R}^2_u$ dei parametri, che rappresenta la circonferenza $C$ di raggio 1 e centro nell'origine in $\mathbf{R}^2_x$; l'insieme $C^*$ è definito come l'insieme tale che $f(C^*) = C$, ossia, essendo $f$ biiettiva, $C^* = f^{-1}(C)$. Pertanto, un punto $u \in \mathbf{R}^2_u$ appartiene a $C^*$ se e solo se $f(u)$ appartiene a $C$, ossia se $\|f(u)\|^2 = 1$, ossia se $g(u) = 1$, che nel nostro caso particolare significa

$$5u_1^2 - 2u_1u_2 + 10u_2^2 = 1 \tag{9.1.12}$$

Sappiamo già in generale dal teorema spettrale che la matrice simmetrica $G$ è diagonalizzabile, ma lo vediamo direttamente nel nostro caso. Il polinomio caratteristico di $G$ è $p(\lambda) = \lambda^2 - 15\lambda + 49$ che ha radici

$$\lambda_1 = \frac{15 + \sqrt{29}}{2} \qquad\qquad \lambda_2 = \frac{15 - \sqrt{29}}{2}$$

Questi sono quindi gli autovalori di $G$. Per trovare gli autovettori corrispondenti, risolviamo i due sistemi del tipo $(G - \lambda I)U = 0$ che si ottengono prendendo di volta in volta $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$. Si ottengono così i due autospazi seguenti, ciascuno dei quali è una retta

$$V_{\lambda_1} = \{t\mathbf{w_1} \mid t \in \mathbf{R}\} \qquad\qquad V_{\lambda_2} = \{t\mathbf{w_2} \mid t \in \mathbf{R}\}$$

dove si è posto

$$\mathbf{w_1} = \left(1, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right) \approx (1\,,\,-5.2) \qquad\qquad \mathbf{w_2} = \left(1, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}\right) \approx (1\,,\,0.19)$$

I vettori $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_2}$ sono ortogonali, [5] come si vede calcolando il prodotto scalare $\mathbf{w_1} \cdot \mathbf{w_2} = 0$, e quindi anche gli autospazi $V_{\lambda_1}$, $V_{\lambda_2}$. A questo punto potremo rapidamente vedere che la forma quadratica $g$ assume una forma diagonale se riferita agli autospazi appena trovati, e vedremo che l'insieme $C^*$ è una ellisse, di cui gli autospazi sono gli assi. Infatti, scriviamo ogni vettore $u \in \mathbf{R}^2_u$ come combinazione lineare della base $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$, ossia

$$u = \alpha_1 \mathbf{w_1} + \alpha_2 \mathbf{w_2} \qquad\qquad U = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2$$

dove abbiamo chiamato $\alpha_1, \alpha_2$ i coefficienti della combinazione lineare, ossia le coordinate di $u \in \mathbf{R}^2_u$ nella base $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$ e dove $W_1, W_2$ sono le colonne corrispondenti ai vettori $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$. Possiamo ora ottenere la formula che esprime la forma quadratica $g$ in termini delle coordinate $\alpha_i$:

$$g(u) = U^T G U \,=\, (\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2)^T\, G\, (\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2) \,=$$

$$(\alpha_1 W_1^T) G (\alpha_1 W_1) + (\alpha_2 W_2^T) G (\alpha_1 W_1) + (\alpha_2 W_2^T) G (\alpha_1 W_1) + (\alpha_2 W_2^T) G (\alpha_2 W_2) =$$

[5] Per le matrici simmetriche è sempre vero che due autovettori, relativi ad autovalori distinti, sono ortogonali.

$$\alpha_1 W_1^T \alpha_1 \lambda_1 W_1 + \alpha_2 W_2^T \alpha_1 \lambda_2 W_1 + \alpha_2 W_2^T \alpha_1 \lambda_1 W_1 + \alpha_2 W_2^T \alpha_2 \lambda_2 W_2 =$$

$$(\lambda_1 \|\mathbf{w_1}\|^2)\alpha_1^2 + (\lambda_2 \|\mathbf{w_2}\|^2)\alpha_2^2$$

dove nel penultimo passaggio si è usato il fatto che i vettori $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$ sono autovettori e nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che sono ortogonali. In conclusione possiamo descrivere l'insieme $C^*$ con una equazione in termini delle coordinate $\alpha_i$ relative al sistema di riferimento $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$: un punto $u \in \mathbf{R}^2_u$ appartiene a $C^*$ se e solo se le sue coordinate $\alpha_1, \alpha_2$ verificano l'equazione

$$(\lambda_1 \|\mathbf{w_1}\|^2)\alpha_1^2 + (\lambda_2 \|\mathbf{w_2}\|^2)\alpha_2^2 = 1 \tag{9.1.13}$$

Quest'ultima equazione rappresenta un'ellisse nelle coordinate $\alpha_1, \alpha_2$ che ha centro nell'origine. Dunque l'ellisse ha come assi gli assi coordinati del riferimento $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$, cioè gli autospazi di $G$. I vertici dell'ellisse si trovano immediatamente come punti di intersezione con gli assi:

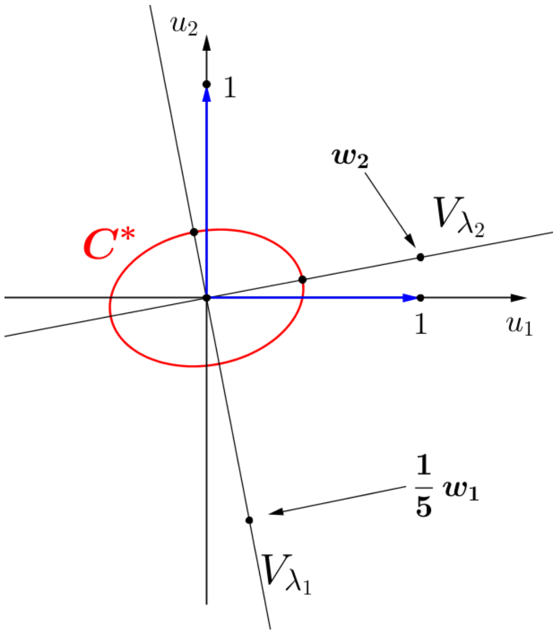
se $\alpha_2 = 0$ allora $\alpha_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}\|\mathbf{w_1}\|}$ e si ottengono i vertici $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\dfrac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|}$ che distano dall'origine $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$;

se $\alpha_1 = 0$ allora $\alpha_2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}\|\mathbf{w_2}\|}$ e si ottengono i vertici $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\dfrac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|}$ che distano dall'origine $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$.

Nel caso particolare che abbiamo preso come esempio, l'autovalore $\lambda_1$ è maggiore di $\lambda_2$ quindi sull'autospazio $V_{\lambda_1}$ i vertici sono più vicini all'origine e si trova l'asse minore dell'ellisse. Precisamente si ha

$$\lambda_1 \approx 10,2 \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \approx 0,31 \qquad \lambda_2 \approx 4,8 \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \approx 0,46$$

e l'insieme $C^*$ è disegnato nella figura sotto



# 10 foglio di esercizi - 26 maggio 2016

## 10.1 Esercizio **una trasformazione lineare è determinata quando si conoscono le immagini dei vettori di una base dello spazio di partenza**

Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbf{R}$ e sia $\mathrm{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ una base di $V$. Sia poi $W$ uno spazio vettoriale qualsiasi su $\mathbf{R}$ e sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.

i. Si mostri che se sono noti i vettori $f(\mathbf{v_1})$, $f(\mathbf{v_2})$, $f(\mathbf{v_3})$, allora è determinato il vettore $f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$ e precisamente $f(\mathbf{v})$ si può scrivere in termini dei vettori $f(\mathbf{v_i})$ e delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base B

ii. Si osservi che l'enunciato del punto i. è equivalente a dire che dati tre elementi $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}$ di $W$, non necessariamente distinti, esiste una e una sola applicazione (o funzione) lineare $f : V \to W$ tale che $f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{w_1}$, $f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{w_2}$, $f(\mathbf{v_3}) = \mathbf{w_3}$.

iii. Si osservi che, nella situazione del punto ii, valgono i seguenti enunciati:

- dire che i vettori $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}$ generano $W$ equivale a dire che $f$ è suriettiva;
- dire che i vettori $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}$ sono linearmente indipendenti equivale a dire che $f$ è iniettiva;
- dire che i vettori $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}$ sono una base di $W$ equivale a dire che $f$ è biiettiva.

iv. Si enuncino i risultati corrispondenti per spazi vettoriali di dimensione finita arbiraria.

## 10.2 Esercizio **un operatore lineare su $\mathbf{R}^3$ e le matrici che lo rappresentano in due basi diverse; relazione con le matrici del cambiamento di coordinate**

Siano $V = W = \mathbf{R}^3$ e siano dati i vettori

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{e_1} \qquad \mathbf{w_2} = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}, \qquad \mathbf{w_3} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$$

dove $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ è la base standard.

i. Si mostri che l'insieme di vettori $\mathrm{B} = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

ii. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(\mathbf{w_1}) = 2\mathbf{w_1} \qquad f(\mathbf{w_2}) = -\mathbf{w_2} \qquad f(\mathbf{w_3}) = 2\mathbf{w_3}$$

e si ricordi che una funzione lineare da uno spazio vettoriale $V$ in sé si dice anche *operatore lineare su $V$*. Senza utilizzare le matrici, si descrivano il nucleo e l'immagine dell'operatore $f$ e in particolare si dica se l'operatore è iniettivo, suriettivo, biettivo. Se è biiettivo si scriva l'operatore inverso. Si trovino gli eventuali autovalori di $f$ e gli autospazi corrispondenti.

iii. Si scriva la matrice $A$ che rappresenta l'operatore $f$ rispetto alla base B in partenza e in arrivo e si ritrovino tutti i risultati del punto ii utilizzando tale matrice.

iv. Vogliamo ora scrivere la matrice $B$ che rappresenta l'operatore $f$ rispetto alla base standard e a questo fine introduciamo alcune notazioni che sono spesso comode. Per ogni punto $P$ di $\mathbf{R}^3$ denotiamo con $x^P = (x_1^P, x_2^P, x_3^P)$ il vettore delle sue coordinate rispetto alla base canonica e sia $X_P$ la corrispondente matrice colonna. Denotiamo inoltre con $u^P$ il vettore delle coordinate di $P$ rispetto alla base B e sia $U_P$ la corrispondente matrice colonna. Infine, per ogni $P \in \mathbf{R}^3$, sia $X_{f(P)}$ la colonna delle coordinate dell'immagine $f(P)$ nella base standard e sia inoltre $U_{f(P)}$ la colonna delle coordinate dello stesso $f(P)$ rispetto alla base B. In conclusione la matrice $A$ già trovata sopra e la matrice $B$ cercata sono quelle per cui

$$X_{f(P)} = BX_P \qquad U_{f(P)} = AU_P \tag{10.2.1}$$

Per trovare $B$ si può procedere come segue.

v. Si scriva la matrice $M$ tale che $X_P = MU_P$ per ogni $P$ di $\mathbf{R}^3$, ossia la matrice del cambiamento di coordinate dal sistema di riferimento B a quello standard. *Suggerimento: basta scrivere $P = u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3$ e scrivere i vettori $w_i$ come colonne delle coordinate nella base standard (si veda l'esercizio 9.1.1).*

vi. Si calcoli (ad esempio con l'algoritmo di Gauss Jordan che si trova in uno degli esercizi successivi) la matrice inversa $M^{-1}$ e si osservi che $U_P = M^{-1}X_P$ per ogni $P$ di $\mathbf{R}^3$.

vii. Tenendo presenti le relazioni viste sopra per le matrici $A, B, M, M^{-1}$ si ha

$$BX_P = X_{f(P)} = MU_{f(P)} = MAU_P = MAM^{-1}X_P$$

da cui si ricava che $B = MAM^{-1}$. Lo studente scriva esplicitamente la matrice $B$ e verifichi che effettivamente $BX_{w_i} = X_{f(w_i)}$ per i vettori della base B.

viii. Utilizzando la matrice $B$ e il metodo del polinomio caratteristico si calcolino gli autovalori e gli autospazi dell'operatore $f$, ritrovando i risultati noti già dal punto ii.

**Soluzione**

i. La matrice che ha come colonne i vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$, ossia la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

è una matrice triangolare superiore che ha tutti i termini sulla diagonale diversi da zero, pertanto ha rango 3 e ne segue che i vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$ sono linearmente indipendenti e l'insieme $\mathrm{B} = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

ii. Dalla definizione di $f$ è evidente che $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_3}$ sono autovettori con autovalore $\lambda_1 = 2$ e $\mathbf{w_2}$ è un autovettore con autovalore $\lambda_2 = -1$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1$ è lo spazio generato dal vettore $\mathbf{w_1}$ e $\mathbf{w_3}$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2$ è lo spazio generato dal vettore $\mathbf{w_2}$.
L'immagine di $f$ è generata dai vettori $f(\mathbf{w_1})$, $f(\mathbf{w_2})$, $f(\mathbf{w_3})$ che sono evidentemente linearmente indipendenti tanto quanto i vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$ quindi l'immagine di $f$ ha dimensione 3 e $\ker(f) = \{0\}$. Si tratta dunque di un operatore biiettivo.
L'operatore inverso $f^{-1} \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ verifica la relazione $f^{-1}(f(w)) = w$ per ogni $w \in \mathbf{R}^3$. Ricordiamo che ogni vettore $w$ dell'autospazio $V_2$ viene mandato dalla funzione $f$ nel vettore $2w$; l'operatore inverso deve quindi agire moltiplicando per $1/2$ ciascun vettore dello stesso spazio. Per un motivo analogo, per ogni vettore $w \in V_{-1}$ si deve avere $f^{-1}(w) = -w$. In conclusione

$$f^{-1}(\mathbf{w_1}) = \frac{1}{2}\mathbf{w_1} \qquad f^{-1}(\mathbf{w_2}) = -\mathbf{w_2} \qquad f^{-1}(\mathbf{w_3}) = \frac{1}{2}\mathbf{w_3}$$

e questo determina l'operatore inverso.

iii. La matrice $A$ che rappresenta l'operatore $f$ rispetto alla base B è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

v. Sia $P = u_1^P w_1 + u_2^P w_2 + u_3^P w_3$. In questa relazione scriviamo i vettori come matrici colonna:

$$X_P = \begin{bmatrix} x_1^P \\ x_2^P \\ x_3^P \end{bmatrix} = u_1^P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2^P \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3^P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^P \\ u_2^P \\ u_3^P \end{bmatrix} = MU_P$$

dove $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è la matrice cercata.

vi. Calcoliamo la matrice inversa $M^{-1}$ usando l'algoritmo di Gauss Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{c} \boxed{r_1 - r_3} \to \\ \boxed{r_2 - r_3} \to \\ \phantom{x} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{r_1+2r_2} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \quad \boxed{-r_2} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{M^{-1}}$$

Dunque $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

vii.

$$B = MAM^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo che $BX_{w_i} = X_{f(w_i)}$ per i vettori della base B:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_{w_1}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_{w_2}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{X_{w_3}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

viii. Sappiamo che la matrice che rappresenta la funzione $f$ rispetto alla base standard è la matrice $B$ trovata al punto precedente. Calcoliamo ora gli autovalori di $f$ usando il metodo del polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 6 & -6 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, con molteplicità 2 e $\lambda_2 = -1$ e vediamo che sono gli stessi che avevamo trovato. Verifichiamo che anche gli autospazi sono quelli già visti.

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 2$ è l'insieme delle soluzioni del sistema $(B - \lambda_1 I)X = 0$, ossia

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $V_{\lambda_1} = V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = x_3 \in \mathbf{R}\}$ e vediamo che contiene i vettori $\mathbf{w_1} = (1,0,0)$ e $\mathbf{w_3} = (1,1,1)$.

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è l'insieme delle soluzioni del sistema $(B - \lambda_1 I)X = 0$, ossia

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_2 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Dunque $V_{\lambda_2} = V_{-1} = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1 = -2x_2 \in \mathbf{R}\}$ che è generato dal vettore $\mathbf{w_2} = (2,-1,0)$.

## 10.3 Esercizio **una stessa funzione lineare si rappresenta con diverse matrici, e d'altra parte una stessa matrice rappresenta funzioni lineari diverse, a seconda delle basi scelte in partenza e in arrivo**

Sia $V = \mathbf{R}^3$ e siano dati i vettori

$$\mathbf{w_1} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \qquad \mathbf{w_2} = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \qquad \mathbf{w_3} = \mathbf{e_3} + \mathbf{e_1}$$

dove $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ è la base standard, o base canonica di $\mathbf{R}^3$, che denotiamo con il simbolo C.

i. Si mostri che i vettori $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \mathbf{w_3}$ sono una base di $\mathbf{R}^3$. Chiameremo B questa base.

ii. Sia $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare che manda, in ordine, la base standard nella base B, ossia la funzione definita da

$$\varphi(\mathbf{e_1}) = \mathbf{w_1} \qquad \varphi(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_2} \qquad \varphi(\mathbf{e_3}) = \mathbf{w_3}$$

Si scrivano le matrici $A$ che rappresentano tale funzione nelle situazioni elencate di seguito

1. base standard C sia in partenza, sia in arrivo;

2. base standard C in partenza, base B in arrivo;

3. base B sia in partenza, sia in arrivo;

4. base B in partenza, base standard C in arrivo.

iii. Come nell'esercizio precedente, per ogni punto $P$ di $\mathbf{R}^3$ denotiamo con $X_P$ la colonna delle coordinate di $P$ nella base standard e denotiamo con $U_P$ la colonna delle coordinate di $P$ nella base B. Si scrivano le matrici $M$ e $M^{-1}$ del cambiamento di coordinate, ossia le matrici tali che $X_P = MU_P$ (che equivale a dire $U_P = M^{-1}X_P$).

iv. Si osservi che la matrice $M$ e la sua inversa sono uguali ad alcune matrici già trovate nel punto ii , dove hanno però un altro significato.

**Soluzione**

i. Scriviamo i vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$ nelle loro componenti sulla base standard C :

$$\mathbf{w_1} = (1,1,0) \qquad \mathbf{w_2} = (0,1,1) \qquad \mathbf{w_3} = (1,0,1)$$

Consideriamo la matrice che ha come colonne tali vettori e riduciamola a gradini:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{-r_1+r_2} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boxed{-r_2+r_3} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice ha rango massimo dunque i vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$ che chiamiamo B .

ii.

1. Vogliamo scrivere la matrice che rappresenta la funzione $\varphi$ quando la base sia in partenza che in arrivo è la base standard C . Dobbiamo quindi scrivere $\varphi(\mathbf{e_1})$, $\varphi(\mathbf{e_2})$, $\varphi(\mathbf{e_3})$ come combinazione lineare dei vettori della base standard:

$$\varphi(\mathbf{e_1}) = \mathbf{w_1} = \mathbf{e_1}+\mathbf{e_2} \qquad \varphi(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_2} = \mathbf{e_2}+\mathbf{e_3} \qquad \varphi(\mathbf{e_3}) = \mathbf{w_3} = \mathbf{e_3}+\mathbf{e_1}$$

Pertanto la matrice associata alla funzione $\varphi$ è in questo caso la matrice che ha come colonne i vettori $\varphi(\mathbf{e_1})$, $\varphi(\mathbf{e_2})$, $\varphi(\mathbf{e_3})$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. In questo caso per conoscere la matrice associata a $\varphi$ dobbiamo scrivere $\varphi(\mathbf{e_1})$, $\varphi(\mathbf{e_2})$, $\varphi(\mathbf{e_3})$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$ della base B . Sappaimo che $\varphi$ è la funzione definita come

$$\varphi(\mathbf{e_1}) = \mathbf{w_1} \qquad \varphi(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_2} \qquad \varphi(\mathbf{e_3}) = \mathbf{w_3}$$

La matrice $A_2$ associata a $\varphi$ ha come colonne le coordinate dei vettori $\varphi(\mathbf{e_1})$, $\varphi(\mathbf{e_2})$, $\varphi(\mathbf{e_3})$ nella base B e dunque:

$$A_2 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Il nostro scopo è ora quello di determinare la matrice che rappresenta la funzione $\varphi$ quando la base sia in partenza che in arrivo è la base B . Tale matrice ha come colonne le coordinate dei vettori $\varphi(\mathbf{w_1})$, $\varphi(\mathbf{w_2})$, $\varphi(\mathbf{w_3})$ nella base $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$, $\mathbf{w_3}$ . Da $\varphi(\mathbf{w_1}) = \varphi(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) = \varphi(\mathbf{e_1})+\varphi(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_1}+\mathbf{w_2}$,
$\varphi(\mathbf{w_2}) = \varphi(\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = \varphi(\mathbf{e_2})+\varphi(\mathbf{e_3}) = \mathbf{w_2}+\mathbf{w_3}$, $\varphi(\mathbf{w_3}) = \varphi(\mathbf{e_3}+\mathbf{e_1}) = \varphi(\mathbf{e_3})+\varphi(\mathbf{e_1}) = \mathbf{w_3}+\mathbf{w_1}$ segue che la matrice che rappresenta $\varphi$ è la matrice

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Bisogna determinare la matrice che rappresenta $\varphi$ quando la base in partenza è la base B e la base in arrivo è la base standard C . Pertanto dobbiamo conoscere le coordinate dei vettori $\varphi(\mathbf{w_1})$, $\varphi(\mathbf{w_2})$, $\varphi(\mathbf{w_3})$ nella base $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ ; queste costituiranno le colonne della matrice $A_4$ cercata.

$$\varphi(\mathbf{w_1}) = \mathbf{w_1}+\mathbf{w_2} = \mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3} \qquad \varphi(\mathbf{w_2}) = \mathbf{w_2}+\mathbf{w_3} = \mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+2\mathbf{e_3} \qquad \varphi(\mathbf{w_3}) = \mathbf{w_3}+\mathbf{w_1} = 2\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$$

Dunque

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

iii. Scriviamo innanzitutto la matrice $M$ che rappresenta il cambiamento di coordinate dalla base B alla base standard C . Preso un punto $P \in \mathbf{R}^3$ , possiamo scrivere $P$ come combinazione lineare degli elementi della base B: $P = u_1^P \mathbf{w_1} + u_2^P \mathbf{w_2} + u_3^P \mathbf{w_3}$ , in questa relazione scriviamo i vettori come matrici colonna:

$$X_P = \begin{bmatrix} x_1^P \\ x_2^P \\ x_3^P \end{bmatrix} = u_1^P \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2^P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + u_3^P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^P \\ u_2^P \\ u_3^P \end{bmatrix} = MU_P$$

dove $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ è la matrice cercata.

La matrice inversa $M^{-1}$ si può ottenere ad esempio usando l'algoritmo di Gauss Jordan ed è

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

## 10.4 Esercizio **l'esercizio 9.1.1 rivisto**

Si consideri l'applicazione

$$\mathrm{id}: \quad \mathbf{R}^2 \quad \to \quad \mathbf{R}^2$$

che manda ogni vettore di $\mathbf{R}^2$ in se stesso.
Si consideri poi la base canonica E di $\mathbf{R}^2$ formata dai vettori

$$\epsilon_1 = (1,0), \quad \epsilon_2 = (0,1),$$

e la base C di $\mathbf{R}^2$ formata dai vettori

$$\mathbf{c_1} = (2,-1), \quad \mathbf{c_2} = (1,3).$$

i. Si scriva la matrice $A$ associata all'applicazione id, considerando sullo spazio di partenza la base C e sullo spazio di arrivo la base E.

ii. Si calcoli $A^{-1}$, dopo aver spiegato perché esiste l'inversa di $A$.

iii. Si noti che $A^{-1}$ è la matrice associata alla funzione $\mathrm{id}^{-1}$, ovvero alla funzione identica con base E in partenza e C in arrivo.

iv. Si trovino le coordinate del vettore $v = (5,4)$ rispetto alla base C sfruttando la matrice $A^{-1}$.

**Soluzione**

i. Nelle colonne della matrice $A$ scriviamo le coordinate di $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ rispetto alla base canonica, quindi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

ii. L'inversa di $A$ esiste perché il rango di $A$ è 2. In alternativa si può notare che $\det(A) \neq 0$ e quindi $A$ è invertibile. Si può dunque calcolare $A^{-1}$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan, ottenendo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

iii. Si noti che $A^{-1}$ è la matrice associata alla funzione $\mathrm{id}^{-1}$, ovvero alla funzione identica con base E in partenza e C in arrivo.

iv. Le coordinate del vettore $v = (5,4)$ rispetto alla base C sono $\left(\frac{11}{7}, \frac{13}{7}\right)$. Possiamo ottenere tali coordinate calcolando $A^{-1}V$, dove $V$ è la colonna delle coordinate di $v$ nella base canonica E.

## 10.5 Esercizio **cambiamenti di base in $\mathbf{R}^3$**

Si considerino i seguenti insiemi di vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \{(1,0,1),(0,1,0),(1,2,3)\}; \\ \mathrm{C} &= \{(1,2,5),(0,2,3),(1,0,0)\}; \\ \mathrm{E} &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}. \end{aligned}$$

1. Si mostri che i vettori di B, C e E formano delle basi di $\mathbf{R}^3$.
2. Si scriva la matrice $M_1$ associata all'applicazione identica
$$\mathrm{id}: \quad \mathbf{R}^3 \quad \to \quad \mathbf{R}^3$$
con base B in partenza e base E in arrivo.
3. Si scriva la matrice $M_2$ associata all'applicazione identica
$$\widetilde{\mathrm{id}}: \quad \mathbf{R}^3 \quad \to \quad \mathbf{R}^3$$
con base C in partenza e base E in arrivo.
4. Si scriva la matrice $M_3$ associata all'applicazione identica su $\mathbf{R}^3$ con base B in partenza e base C in arrivo. [Suggerimento: si può sfruttare il fatto che quest'ultima applicazione è data da $\widetilde{\mathrm{id}}^{-1} \circ \mathrm{id}$. Come si ottiene la matrice $M_3$ associata a quest'ultima applicazione dalle matrici $M_1$ e $M_2$?]
5. Si scrivano le coordinate del vettore $v = (1,0,1)$ rispetto alla base C sfruttando i risultati precedenti.
6. Osserviamo che la matrice $M_3$ può essere costruita anche in un modo alternativo, ovvero calcolando le coordinate dei 3 vettori della base B rispetto alla base C. Si costruisca dunque la matrice $M_3$ seguendo questo procedimento.

**Soluzione**

i. Questa verifica è lasciata al lettore.
ii. La matrice $M_1$ ha per colonne le coordinate di $\mathrm{id}(\mathbf{b}_1)$, $\mathrm{id}(\mathbf{b}_2)$ e $\mathrm{id}(\mathbf{b}_3)$ rispetto alla base standard E, dove $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3$ sono i vettori di B:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

iii. La matrice $M_2$ ha per colonne le coordinate di $\widetilde{\mathrm{id}}(\mathbf{c}_1)$, $\widetilde{\mathrm{id}}(\mathbf{c}_2)$ e $\widetilde{\mathrm{id}}(\mathbf{c}_3)$ rispetto alla base standard E, dove $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ e $\mathbf{c}_3$ sono i vettori di C:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

iv. Osserviamo che

$$M_3 = M_2^{-1} \cdot M_1.$$

Si può calcolare l'inversa di $M_2$ usando l'algoritmo di Gauss-Jordan. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} M_2^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \\ M_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

v. Notiamo che $v = \mathbf{b}_1$. Visto che $\mathbf{b}_1 = 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2 + 0 \cdot \mathbf{b}_3$ e la matrice $M_3$ trasforma le coordinate di un vettore rispetto alla base B nelle sue coordinate rispetto alla base C, possiamo dire che le coordinate di $v = \mathbf{b}_1$ rispetto alla base C sono

$$M_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

ovvero $v = \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_3$.

vi. Vediamo nel dettaglio come determinare i coefficienti della prima colonna di

$$M_3 = \begin{bmatrix} x_1 & \bullet & \bullet \\ x_2 & \bullet & \bullet \\ x_3 & \bullet & \bullet \end{bmatrix}.$$

I coefficienti $x_1, x_2$ e $x_3$ devono essere le coordinate di $\widetilde{\mathrm{id}}^{-1}(\mathrm{id}(\mathbf{b}_1))$ rispetto alla base C. Quindi

$$(1,0,1) = x_1 \cdot (1,2,5) + x_2 \cdot (0,2,3) + x_3 \cdot (1,0,0).$$

Quest'ultima equazione si traduce in un sistema lineare di 3 equazioni lineari nelle 3 incognite $x_1, x_2$ e $x_3$ che ha come unica soluzione

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

## 10.6 Esercizio una isometria di $\mathbf{R}^3$

Sia $V = \mathbf{R}^3$ e sia $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ la base standard (o base canonica) di $V$. Sia poi $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare determinata dalle condizioni

$$f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2}, \qquad f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_3}, \qquad f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_1}$$

i. Si determini e si rappresenti l'immagine $f(Q)$ del cubo standard $Q = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1,\ 0 \le x_3 \le 1 \right\}$

ii. Si mostri che la trasformazione $f$ è una isometria di $V$ rispetto al prodotto scalare euclideo standard di $\mathbf{R}^3$, ossia che vale

$$f(\mathbf{e_i}) \cdot f(\mathbf{e_j}) = \mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j} \qquad \forall i,j = 1,2,3 \tag{10.6.1}$$

e che pertanto si ha anche

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \qquad \forall x,y \in \mathbf{R}^3$$

iii. Si scriva la matrice $A$ che rappresenta $f$ rispetto alla base standard in $\mathbf{R}^3$.

iv. Si mostri che la (10.6.1) equivale a dire che la matrice $A$ è ortogonale.

v. Si trovino gli autovalori e gli autovettori della trasformazione $f$. Si mostri che gli autovalori di una isometria possono essere solamente 1 e $-1$.

vi. Si calcoli il determinante della trasformazione $f$. Si dimostri in generale che il determinante di una matrice ortogonale può assumere soltanto i valori $+1$ o $-1$.

vii. Si mostri che la trasformazione $f$ è una rotazione intorno a una retta e si determinino tale retta, detta asse di rotazione, e l'angolo di rotazione.

### Soluzione

i. Per ogni $x = (x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \mathbf{R}^3$ si ha $f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + x_3f(e_3) = x_1e_2 + x_2e_3 + x_3e_1 = (x_2, x_3, x_1)$. Vediamo quindi che la funzione opera come una permutazione ciclica delle coordinate e si capisce che se $x \in Q$, allora anche $f(x)$ è un elemento di $Q$. D'altra parte $f$ è evidentemente biiettiva e quindi $f(Q) = Q$.

ii. Entrambi i membri di (10.6.1) sono uguali a 1 se $i = j$ e sono uguali a zero se $i \ne j$, quindi la (10.6.1) è vera. Inoltre, utilizzando la (10.6.1) nel secondo passaggio, si ha

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i f(e_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{3} y_j f(e_j)\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \qquad \forall x,y \in \mathbf{R}^3$$

iii. La matrice $A$ ha come colonne le coordinate nella base standard dei vettori $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$; quindi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

iv. Una matrice $A$ si dice ortogonale se $A^T A = I$. La verifica è immediata. Osserviamo che questo equivale a dire che:

- il prodotto scalare di ogni colonna di $A$ per se stessa è uguale a 1
- il prodotto scalare di due colonne distinte di $A$ è uguale a 0. In altre parole, una matrice $n \times n$ è ortogonale se e solo se le colonne sono una base ortonormale di $\mathbf{R}^n$.

v. Il polinomio caratteristico della matrice $A$ è $p(\lambda) = -\lambda^3 + 1$ che ha come unica radice $\lambda = 1$ che è quindi l'unico autovalore. Gli autovettori corrispondenti si trovano risolvendo il sistema $(A - \lambda I)X = 0$.
L'autospazio $V_1$ corrispondente è la retta generata dal vettore $w = (1,1,1)$. Geometricamente questo significa che $V_1$ è una retta i cui vettori vengono lasciati invariati dalla trasformazione.

In generale se $f$ è una isometria, $\lambda$ è un autovalore e $w \neq 0$ è un autovettore di $\lambda$, allora si ha $\|w\|^2 = \|f(w)\|^2 = \|\lambda w\|^2 = \lambda^2 \|w\|^2$ da cui $\lambda^2 = 1$ e quindi $\lambda$ può essere solamente 1 o $-1$.

vi. Il determinante della trasformazione $f$ è uguale a $\det A = 1$.

Più in generale, per ogni matrice ortogonale $A$ si ha $\det A \det A = \det A^T \det A = \det(A^T A) = \det I = 1$. Pertanto $\det A = \pm 1$.

vii. Abbiamo visto al punto v. che i vettori dell'autospazio $V_1$ vengono lasciati invariati dalla traformazione $f$. Consideriamo l'insieme $U \subset \mathbf{R}^3$ dei vettori ortogonali alla retta $V_1$, ossia l'insieme di tutti i vettori $u$ tali che $u \cdot (1,1,1) = 0$. Si lascia al lettore l'immediata verifica che $U$ è un sottospazio vettoriale. Si dice che $U$ è il piano ortogonale alla retta $V_1$. Osserviamo ora che la trasformazione $f$, essendo ortogonale, manda i vettori di $U$ in vettori di $U$, e non ha autovettori in $U$, pertanto è una rotazione su $U$. Nel complesso si dice che la trasformazione $f$ è una rotazione intorno all'asse $V_1$.

Per determinare l'angolo di rotazione, prendiamo un vettore di $U$ e vediamo dove viene mandato da $f$. Si vede subito che ad esempio $y = (1,-1,0)$ è un vettore ortogonale a $w = (1,1,1)$. Lo studente visualizzi tale vettore e lo rappresenti con un disegno. Il vettore $z = f(y)$ si ottiene come prodotto di matrici $Z = AY$, ossia

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se chiamiamo $\beta$ l'angolo fra i vettori $y$ e $z$, abbiamo

$$\cos\beta = \frac{y \cdot z}{\|y\| \, \|z\|} = \frac{-1}{2}$$

e pertanto $\beta = \frac{2}{3}\pi$, ovvero la rotazione è di 120°.

## 10.7 Esercizio **applicazioni iniettive e/o suriettive**

Siano C e E gli insiemi di vettori di $\mathbf{R}^3$ dell'esercizio precedente.
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ così definita:

$$f(x,y,z) = (2x - y,\ 3y - 2z,\ z - 3x).$$

i. Si scriva la matrice $A$ associata all'applicazione $f$ rispetto alla base E sullo spazio di partenza e arrivo.

ii. Si scriva la matrice $B$ associata all'applicazione $f$ rispetto alla base C sullo spazio di partenza e arrivo.

iii. Si calcolino i ranghi di $A$ e di $B$. Che relazione c'è fra i due ranghi? Perché?

iv. L'applicazione $f$ è iniettiva e/o suriettiva?

**Soluzione**

i. Le colonne della matrice $A$ contengono le coordinate, rispetto alla base canonica, delle immagini dei vettori della base canonica, quindi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ii. Le colonne della matrice $B$ contengono le coordinate rispetto alla base C delle immagini dei vettori di C. Innanzitutto calcoliamo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) &= (0,-4,2), \\ f(\mathbf{c}_2) &= (-2,0,3), \\ f(\mathbf{c}_3) &= (2,0,-3). \end{aligned}$$

Ora scriviamo le immagini come combinazioni lineari di $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ e $\mathbf{c}_3$ (per fare ciò è necessario risolvere degli opportuni sistemi lineari, che qui sono omessi):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) &= 4\mathbf{c}_1 - 6\mathbf{c}_2 - 4\mathbf{c}_3, \\ f(\mathbf{c}_2) &= \frac{3}{2}\mathbf{c}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{c}_2 - \frac{7}{2}\mathbf{c}_3, \\ f(\mathbf{c}_3) &= -\frac{3}{2}\mathbf{c}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{c}_2 + \frac{7}{2}\mathbf{c}_3. \end{aligned}$$

In base a quanto calcolato possiamo scrivere

$$B = \begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -6 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -4 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

iii. Il rango di $A$ è uguale al rango di $B$ ed è 2 (per calcolarlo basta ad esempio ridurre a scala entrambe le matrici e notare che il numero di pivot delle matrici ridotte a scala è 2). Visto che il rango della matrice associata ad un'applicazione lineare è uguale alla dimensione dell'immagine dell'applicazione stessa, il rango delle due matrici deve essere uguale.

iv. L'applicazione $f$ non può essere suriettiva in quanto $f(\mathbf{R}^3) \neq \mathbf{R}^3$ poiché $\dim(f(\mathbf{R}^3)) = 2$. Inoltre, per il teorema del rango più nullità, $\dim(\ker(f)) = 1$, quindi $f$ non è nemmeno iniettiva.

## 10.8 Esercizio **applicazioni iniettive e/o suriettive (2)**

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ così definita:

$$f(x,y,z) = (x+y-z,\ x-y,\ x+y+z,\ z).$$

i. L'applicazione $f$ è iniettiva? Perché?

ii. L'applicazione $f$ è suriettiva? Perché?

**Soluzione**

Costruiamo la matrice $A$ associata a $f$ rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il rango di $A$ è 3 (lo si verifichi).

i. Visto che il rango di $A$ è 3, le 3 colonne di $A$ sono linearmente indipendenti e quindi l'unica soluzione del sistema lineare

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Quindi $\ker(f)$ è lo spazio banale e $f$ è iniettiva.

ii. L'applicazione $f$ non può essere suriettiva visto che

$$\dim(\mathbf{R}^3) = \dim(f(\mathbf{R}^3)) + \dim(\ker(f)),$$

ovvero $\dim(f(\mathbf{R}^3)) = 3 \neq \dim(\mathbf{R}^4)$.

## 10.9 Esercizio **applicazioni iniettive e/o suriettive (3)**

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ così definita:

$$f(x,y,z,w) = (x+y-z,\ x+y+w,\ z).$$

i. L'applicazione $f$ è iniettiva? Perché?

ii. L'applicazione $f$ è suriettiva? Perché?

**Soluzione**

Costruiamo la matrice $A$ associata a $f$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^4$ e $\mathbf{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il rango di $A$ è 3 (lo si verifichi).

i. L'applicazione $f$ non è iniettiva visto che le $4$ colonne di $A$ non possono essere linearmente indipendenti. In altre parole il sistema lineare

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ha infinite soluzioni che dipendono da $1$ parametro libero, visto che il numero di incognite è $4$ e il rango di $A$ è $3$.

ii. L'applicazione $f$ è suriettiva in quanto la dimensione dell'immagine $f(\mathbf{R}^4)$ è 3.

## 10.10 Esercizio **algoritmo di Gauss-Jordan per trovare la matrice inversa**

Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e poniamoci il problema:

a) la matrice $A$ è invertibile?
b) se $A$ è invertibile, come calcoliamo la matrice inversa?

Diciamo subito che non vogliamo usare la formula (che si ricava dallo sviluppo di Laplace) che esprime la matrice inversa in termini del determinante e dei cofattori. Infatti tale formula, che ha notevole interesse teorico, è però molto pesante al crescere del numero $n$ di righe ed è essenzialmente inutilizzabile dal punto di vista computazionale, poiché richiede un numero di moltiplicazioni dell'ordine di $n!$, che è un numero esorbitante già per n=100, mentre è usuale risolvere sistemi con decine di migliaia di incognite ed equazioni. L'algoritmo che troveremo richiede invece un numero di moltiplicazioni dell'ordine di $\frac{n^3}{2}$ [si veda ad esempio Raimer Kress: *Numerical Analysis* , Springer].

Per vedere se la matrice $A$ è invertibile, utilizzeremo l'algoritmo di eliminazione di Gauss, già visto nel foglio 6. Scriviamo però la matrice identità a fianco della matrice $A$ come segue:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e, mentre facciamo le necessarie operazioni di riga su $A$, facciamo le stesse operazioni anche sulla matrice identità:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \boxed{r_1+r_2}\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{10.10.1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{-2r_1+r_3}\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \boxed{r_2+r_3}\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{10.10.2}$$

a questo punto la matrice a sinistra è triangolare superiore e ha gli elementi sulla diagonale diversi da zero, pertanto ha rango 3, dunque anche la matrice $A$ ha lo stesso rango 3, ossia è invertibile. *Da questo punto comincia la seconda parte dell'algoritmo, che ci porterà a trovare la matrice inversa* $A^{-1}$. Continueremo ad operare sulle righe, in modo da portare la matrice di sinistra ad avere uguali a zero tutti gli elementi fuori dalla diagonale, poi moltiplicheremo le righe per opportuni numeri, in modo che nella matrice a sinistra gli elementi sulla diagonale diventino uguali a 1.

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \boxed{-(1/2)r_3+r_2}\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \tag{10.10.3}$$

$$\boxed{-r_2+r_1}\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{c} \boxed{1/2r_2}\rightarrow \\ \boxed{1/2r_3}\rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \tag{10.10.4}$$

A questo punto a sinistra c'è la matrice identità e a destra si trova la matrice $B =$.

i. Si verifichi che il prodotto $AB$ è la matrice identità. Dunque la matrice $B$ è la matrice inversa di $A$. La procedura di cui si è dato un esempio funziona per tutte le matrici invertibili di qualunque ordine e si chiama comunemente *algoritmo di Gauss-Jordan*. Nei prossimi esercizi si trova una spiegazione del perché la procedura funziona. Lo studente è invitato a trovare una sua spiegazione.

ii. Si applichi l'algoritmo di Gauss-Jordan alle seguenti matrici e si si verifichi che in effetti, quando a sinistra si è arrivati alla matrice identità, a destra si è ottenuta la matrice inversa della matrice iniziale.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

## 10.11 Esercizio **perché funziona l'algoritmo di Gauss-Jordan? - operazioni elementari sulle righe ottenute mediante prodotti con matrici elementari**

Abbiamo visto nell'esercizio precedente l'algoritmo di Gauss-Jordan, che consiste di ripetute opportune operazioni elementari sulle righe di una coppia di matrici $[A \mid I]$, mediante le quali si arriva ad una coppia di matrici $[I \mid D]$, dove $D = A^{-1}$. L'obiettivo di questo esercizio è di comprendere le ragioni per cui la procedura in effetti produce una matrice $D$ che è l'inversa della matrice $A$ iniziale. Faremo questo grazie ad una interpretazione delle operazioni elementari sulle righe di una matrice $A$ come prodotti del tipo $MA$, dove $M$ sono matrici opportune. Grazie a questo strumento non solo comprenderemo l'algoritmo di Gauss-Jordan, ma otterremo in un prossimo esercizio anche la decomposizione $A = LU$, dove $L$ è una matrice triangolare inferiore e $U$ è una matrice triangolare superiore, che è di interesse per la soluzione numerica dei sistemi lineari.

Avvertenza importante: il ragionamento che segue è molto semplice ed è molto più lungo da scrivere che da pensare. Nell'esercitazione sarà spiegato e può essere chiesto al tutorato. Chi lo vuole capire dal testo scritto deve armarsi di un po' di pazienza, essere fiducioso e trascrivere ogni passaggio con calma su un foglio di carta, comprendendo ogni singolo passaggio. A un certo punto si capisce tutto bene.

Osserviamo per cominciare che l'operazione $1 \cdot r_1 + r_2$ sulle righe che si fa nella (10.10.1) equivale a moltiplicare a sinistra per la matrice

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.11.1}$$

infatti

$$M_1\,A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.11.2}$$

Conviene anzi fare tale operazione sulla coppia di matrici $[\,A \mid I\,]$, che tratteremo come un'unica matrice con tre righe e sei colonne, proprio come nella (10.10.1)

$$M_1[\,A \mid I\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\quad A \qquad\quad I} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\quad M_1\,A \qquad M_1} = [\,M_1\,A \mid M_1\,] \tag{10.11.3}$$

Osserviamo che la matrice $M_1$ ha gli elementi sulla diagonale uguali a 1 e gli altri elementi uguali a $0$, escluso l'elemento che sta all'incrocio fra la prima colonna e la seconda riga che è uguale a 1. Le formule (10.11.2) e (10.11.3) mostrano che *moltiplicare a sinistra per la matrice $M_1$ equivale a una operazione sulle righe e precisamente: "aggiungere alla seconda riga la prima riga moltiplicata per il coefficiente $1$".*

In modo analogo a quanto si è appena visto, anche le altre operazioni sulle righe che si sono fatte nei successivi passi (10.10.2), (10.10.3), (10.10.4) dell'algoritmo di Gauss-Jordan si possono scrivere come successive moltiplicazioni a sinistra per opportune matrici. Vediamo il secondo e il terzo passo, che si trovano in (10.10.2):

l'operazione $-2 \cdot r_1 + r_3$ sulle righe equivale a moltiplicare la matrice $[\,M_1 A \mid M_1\,]$ a sinistra

per la matrice $\quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad$ ovvero:

$$M_2[\,M_1 A \mid M_1\,] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\quad M_1\,A \qquad M_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\quad M_2 M_1 A \qquad M_2 M_1}$$

inoltre l'operazione $1 \cdot r_2 + r_3$ sulle righe equivale a moltiplicare a sinistra la matrice $[\,M_2 M_1 A \mid M_2 M_1\,]$

per la matrice $\quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad$ cioè:

$$M_3[\,M_2 M_1 A \mid M_2 M_1\,] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]_{\quad M_2 M_1 A \qquad M_2 M_1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]_{\quad M A \qquad M} = [\,MA \mid M\,]$$

dove abbiamo posto $M = M_3 M_2 M_1$ . Abbiamo così concluso la prima parte dell'algoritmo di Gauss-Jordan, che ci ha portato a trovare a sinistra la matrice triangolare superiore $MA$ e a destra la matrice $M$.

Continuiamo ora con la seconda parte dell'algoritmo di Gauss-Jordan, con l'obiettivo di ottenere a sinistra la matrice identità e a destra la matrice inversa $A^{-1}$. Dobbiamo pertanto eseguire le operazioni di riga indicate in (10.10.3) e (10.10.4); anche queste operazioni si ottengono mediante moltiplicazioni a sinistra per opportune matrici:

l'operazione $-\frac{1}{2} r_3 + r_2$ in (10.10.3) equivale a moltiplicare a sinistra la matrice $[\,MA \mid M\,]$

per la matrice $\quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad$ ovvero:

$$C_1[MA \,|\, M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{MA}\!\!\left|\,\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{M}\right] = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}_{C_1MA} \left|\, \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{C_1M}\right.\right] = [C_1MA \,|\, C_1M];$$

la successiva operazione $\;-r_2 + r_1\;$ equivale a moltiplicare a sinistra la matrice $[C_1MA \,|\, C_1M]$

per la matrice $\quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad$ ovvero:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_2} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}_{C_1MA} \left|\, \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{C_1M}\right.\right] = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}_{C_2C_1MA} \left|\, \underbrace{\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{C_2C_1M}\right.\right] = [C_2C_1MA \,|\, C_2C_1M]$$

Infine l'operazione nell'ultimo passo in (10.10.4) equivale a moltiplicare a sinistra la matrice $[C_2C_1MA \,|\, C_2C_1M]$

per la matrice $\quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad$ ovvero:

$$C_3[C_2C_1MA \,|\, C_2C_1M] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{C_3} \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}_{C_2C_1MA} \left|\, \underbrace{\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{C_2C_1M}\right.\right] = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{CMA} \left|\, \underbrace{\begin{matrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix}}_{CM}\right.\right]$$

dove si è posto $C = C_3C_2C_1$. In conclusione si vede quindi che $CMA = I$ e ne segue $CM = A^{-1}$. In altre parole la matrice che si è trovata a destra nell'ultimo passaggio è la matrice inversa della matrice $A$.

## 10.12 Esercizio **decomposizioni $A = LU$ e $PA = LU$**

Nella stessa situazione dell'esercizio precedente e con le stesse notazioni, osserviamo che *la prima parte* dell'algoritmo di Gauss-Jordan, la quale è il solito algoritmo di eliminazione già studiato a lungo nei precedenti fogli di esercizi, ci ha fatto trovare a destra una matrice $M$ triangolare inferiore, e a sinistra la matrice triangolare superiore $MA$, che denoteremo con il simbolo $U$. Osserviamo che la matrice $M$ è invertibile, poiché è il prodotto $M = M_1M_2M_3$ delle matrici $M_1, M_2, M_3$, ciascuna delle quali è evidentemente invertibile; infatti, ad esempio si ha

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poniamo ora $L = M^{-1}$ e osserviamo che è una matrice triangolare inferiore. In conclusione si è trovato che

$$A = M^{-1}MA = LU \tag{10.12.1}$$

ossia *la matrice $A$ è scritta come prodotto di una matrice triangolare inferiore per una matrice triangolare superiore*. Una tale decomposizione, che si chiama decomposizione $LU$ ($L$ sta per *lower* e $U$ sta per *upper*) è molto comoda quando si vuole risolvere il sistema $AX = Y$. Infatti tale sistema si scrive $LUX = Y$ e si riduce quindi a risolvere due sistemi triangolari: $LZ = Y$ e poi $UX = Z$. Tale procedimento è computazionalmente più rapido rispetto a trovare la matrice inversa, che in molti casi non è necessario calcolare.

i. Si mostri, trovando un controesempio per le matrici $2 \times 2$, che la decomposizione $LU$ non è sempre possibile.
ii. Si mostri che che se $A$ è invertibile, allora è sempre possibile trovare una matrice $P$ che permuta le righe, tale che la matrice $PA$ ha una decomposizione $LU$, ossia $PA = LU$. Ai fini di risolvere il sistema $AX = Y$, questo è ugualmente utile (si veda qualsiasi libro di analisi numerica oppure ad esempio G.Strang, Algebra lineare).

## 11 foglio di esercizi - 18 settembre 2018

### 11.1 Esercizio matrici, autovalori e autovettori, forme quadratiche

Ricordiamo che un polinomio di secondo grado a coefficienti reali in una indeterminata $x$ è una espressione algebrica del tipo $p(x) = ax^2 + bx + c$, dove $a, b, c$ sono numeri reali e $a$ è diverso da zero. Ricordiamo che se si assegna un valore reale all'indeterminata $x$, allora l'espressione $p(x)$ si può calcolare e assume un valore in $\mathbf{R}$. La funzione che manda ogni valore dell'indeterminata $x$ nel valore dell'espressione $p(x)$ si chiama *funzione polinomiale associata al polinomio* $p(x)$. Spesso però la funzione polinomiale si identifica con l'espressione algebrica e il termine "polinomio" si usa per indicare sia l'una che l'altro. Anche noi faremo così.

Vogliamo ora introdurre il concetto di *polinomio* $p = p(x_1, x_2)$ *di secondo grado in due indeterminate* $x_1$ *e* $x_2$. Sarà un'espressione in cui compaiono:

- termini di secondo grado, ossia: i prodotti $x_1^2$, $x_1x_2$, $x_2^2$ moltiplicati per opportuni coefficienti;
- termini di primo grado, ossia $x_1$ e $x_2$ moltiplicati per opportuni coefficienti;
- un termine di grado zero, ossia una costante.

Si ha insomma:

$$p(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma \tag{11.1.1}$$

Un polinomio in due variabili che contiene soltanto termini di secondo grado si chiama *forma quadratica in due variabili*, o anche forma quadratica su $\mathbf{R}^2$. Ecco un esempio di forma quadratica su $\mathbf{R}^2$:

$$\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \tag{11.1.2}$$

Per scrivere una forma quadratica può essere molto comodo usare il linguaggio delle matrici. Con riferimento all'esempio appena indicato si vede infatti che

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X^T AX \tag{11.1.3}$$

dove $X$ è il vettore $x = (x_1, x_2)$ scritto come matrice colonna e la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ si chiama *matrice associata alla forma quadratica* $\varphi$. Osserviamo che esistono infinite matrici $B$ tali che $\varphi(x_1, x_2) = X^T BX$ (lo studente ne scriva alcune), ma ne esiste una ed una sola che è simmetrica, e questa è la matrice associata alla forma quadratica.

i. Scriviamo alcuni esempi di forme quadratiche su $\mathbf{R}^2$ e a fianco le matrici associate. Lo studente completi i dati mancanti.

**1.** $-x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ $\qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ; $\qquad$ **2.** $2x_1^2 + \dots$ $\qquad A = \begin{bmatrix} \dots & -1 \\ \dots & 0 \end{bmatrix}$

**3.** $ax^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ $\qquad A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$

ii. Una forma quadratica su $\mathbf{R}^3$, ossia in tre variabili, è un polinomio $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ in tre variabili che ha solo termini di secondo grado. Una tale forma quadratica si può rappresentare con una ed una sola matrice simmetrica $3 \times 3$. Lo studente completi i dati mancanti nell'esempio sotto

$$\varphi(x) = (\dots)x_1^2 - x_3^2 + (\dots)x_1x_2 + (\dots)x_2x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & -5/2 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T AX \tag{11.1.4}$$

iii. Si scriva la matrice $4 \times 4$ che rappresenta la forma quadratica $\varphi$ in $\mathbf{R}^4$ definita da $\varphi(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 - 2x_3^2$

**Soluzione**

i.

2. $2x_1^2 - 2x_1x_2$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $ax^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ $\qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

ii. $\varphi(x) = 2x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 5x_2x_3$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & -1 \end{bmatrix}$

iii. La matrice $A$ che rappresenta la forma quadratica $\varphi(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_4 - 2x_3^2$ è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 11.2 Esercizio ellisse

Nel piano $\mathbf{R}^2$ consideriamo la forma quadratica

$$\varphi(x) = \frac{1}{9}x_1^2 + 4x_2^2 \tag{11.2.1}$$

e consideriamo l'insieme $C$ dei punti $x = (x_1, x_2)$ per i quali vale $\varphi(x) = 1$. In altre parole l'insieme $C$ è il luogo dei punti del piano che verificano l'equazione

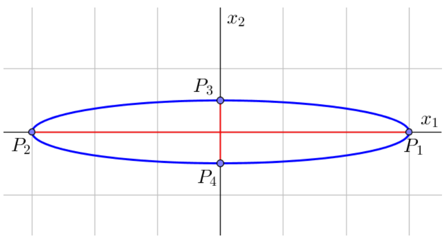
$$\left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + (2x_2)^2 = 1 \tag{11.2.2}$$

Questa curva è un esempio di *ellisse*. L'ellisse è stata inizialmente studiata in epoca greca, insieme a iperbole e parabola, come sezione conica, (si veda ad esempio `https://it.wikipedia.org/wiki/Sezione_conica`). Tali curve sono di notevole importanza per la modellizzazione di fenomeni naturali e oggetti artificiali. In questa sede verranno trattate solamente dal punto di vista della geometria analitica.

i. Si mostri che la curva (11.2.2) è simmetrica rispetto alle rette $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ ed è inoltre simmetrica rispetto all'origine. Si dice pertanto che tale ellisse ha *centro* nell'origine ed ha *assi* di simmetria coincidenti con gli assi coordinati $x_1$ e $x_2$.

ii. Si verifichi che le intersezioni dell'ellisse con gli assi sono i punti $P_1 = (3, 0)$, $P_2 = (-3, 0)$, $P_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $P_4 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Questi punti si dicono *vertici* dell'ellisse (11.2.2). Si chiamano comunemente *assi dell'ellisse* i segmenti che congiungono i vertici opposti rispetto al centro e spesso si usa la stessa parola *assi* anche per indicare le *lunghezze* degli stessi segmenti.

Nonostante questo, in genere si riesce a capire dal contesto quale delle diverse cose si intende. Nel caso particolare che si sta considerando, l'asse maggiore si trova sull'asse $x_1$ ed è lungo 6, mentre l'asse minore si trova sull'asse $x_2$ ed è lungo 1. Spesso è comodo utilizzare i *semiassi*, che sono la metà degli assi.




In generale, se $a_1, a_2$ sono numeri positivi, l'insieme

$$E = \{x \mid a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = 1\} = \{x \mid \varphi(x) = 1\} \tag{11.2.3}$$

dove $\varphi(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$, è un'ellisse che ha centro nell'origine e ha vertici nei punti

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, 0\right), \qquad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{a_1}}, 0\right), \qquad P_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{a_2}}\right), \qquad P_4 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)$$

Le lunghezze dei semiassi sono $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{a_2}}$.

Osserviamo che una forma quadratica $\varphi$ in cui non c'è il *termine misto* $x_1x_2$ si scrive in forma matriciale

$$\varphi(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X^TAX \qquad \text{dove } A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}; \text{ è una matrice } \textit{diagonale}.$$

iii. Si chiama ellisse anche ogni altra curva che si ottiene ruotando o traslando una curva del tipo (11.2.3).

Si consideri l'ellisse $\hat{C}$ che si ottiene ruotando di $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario la curva $C$ in (11.2.2) e si trovi la forma quadratica $\psi$ su $\mathbf{R}^2$ che descrive $\hat{C}$, ossia tale che $\hat{C} = \{y \mid \psi(y) = 1\}$.

Si consideri l'ellisse $\hat{C}_v$ che si ottiene traslando con il vettore $v = (2,1)$ la curva $\hat{C}$ e se ne dia una descrizione analitica come luogo di zeri di un polinomio di secondo grado in due variabili.

**Soluzione**

i. Sia $P = (x_1^P, x_2^P)$ un punto appartenente all'ellisse $C$. Vogliamo provare che anche il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto all'asse $x_1$, ossia $P' = (x_1^P, -x_2^P)$, appartiene a $C$. Questo si vede immediatamente, poiché l'equazione (11.2.2) contiene la variabile $x_2$ soltanto nel termine $x_2^2$, che non cambia se si cambia segno a $x_2$.
In modo analogo si vede che la curva $C$ è simmetrica rispetto all'asse $x_2$, ossia che $(x_1, x_2) \in C$ se e solo se $(-x_1, x_2) \in C$.

Infine, da quanto appena detto segue che la curva $C$ è simmetrica rispetto all'origine, ossia che $(x_1, x_2) \in C$ se e solo se $(-x_1, -x_2) \in C$.

ii. I punti $P_1$ e $P_2$ di intersezione dell'ellisse $C$ con l'asse $x_1$ sono i punti che appartengono a $C$ (ossia: verificano l'equazione $\frac{1}{9}x_1^2 + 4x_2^2 = 1$) e che appartengono anche all'asse $x_1$ (ossia: verificano la condizione $x_2 = 0$). Utilizzando la seconda relazione nella prima si deduce che vale $\frac{1}{9}x_1^2 + 0 = 1$, da cui si ottiene che $x_1$ può avere i valori $x_1 = 3$ e $x_1 = -3$. In conclusione i punti di intersezione di $C$ con l'asse $x_1$ sono $P_1 = (3,0)$, $P_2 = (-3,0)$.
In modo analogo si trova che i punti di intersezione dell'ellisse con l'asse $x_2$ sono $P_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $P_4 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

iii. La curva $\hat{C}$ è ottenuta ruotando $C$ di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ in senso antiorario intorno all'origine. Vogliamo descrivere la curva $\hat{C}$ come l'insieme dei punti $y \in \mathbf{R}^2$ che verificano un'equazione del tipo $\psi(y_1, y_2) = 0$. Per far questo osserviamo che un punto $y = (y_1, y_2)$ appartiene a $\hat{C}$ se e solo se $y$ si ottiene come ruotato di un punto $x \in C$, ossia $Y = RX$, dove $R$ è la matrice della rotazione di angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ossia $X = R^{-1}Y \in C$, dove $R^{-1}$ è la matrice inversa di $R$. Poiché la funzione inversa di $R$ è la rotazione di $-\frac{\pi}{3}$, si ha

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \\ \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \end{bmatrix}$$

e in conclusione

$$y \in \hat{C} \iff x \in C \iff \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right)^2 + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2\right)^2 = 1 \iff \psi(y_1, y_2) = 1$$

dove

$$\psi(y_1, y_2) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right)^2 + 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2\right)^2 = \left(3 + \frac{1}{36}\right)y_1^2 + 2\sqrt{3}\left(-1 + \frac{1}{36}\right)y_1y_2 + \left(1 + \frac{1}{12}\right)y_2^2$$

è la forma quadratica cercata, che descrive l'ellisse $\hat{C}$ ruotata.

Vediamo ora un altro modo di ottenere il medesimo risultato.

Consideriamo i vettori $\mathbf{w_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\mathbf{w_2} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, che si ottengono ruotando di $\frac{\pi}{3}$ in senso antiorario i vettori della base standard e osserviamo che essi costituiscono una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$. Denotiamo $u = (u_1, u_2)$ le coordinate in questa nuova base di un punto $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ e ricordiamo che si ha $X = RU$, dove la matrice $R$ ha come colonne i vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_1}$ ed è anche la matrice della rotazione di $\frac{\pi}{3}$. Ricordiamo inoltre che $U = R^{-1}X = R^T X$, poiché $R$ è una matrice ortogonale. Nelle coordinate $u = (u_1, u_2)$ la curva $\hat{C}$ è descritta dall'equazione

$$1 \;=\; \frac{1}{9}u_1^2 + 4u_2^2 \;=\; \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \;=\; U^T D U$$

che nelle coordinate $x = (x_1, x_2)$ diventa

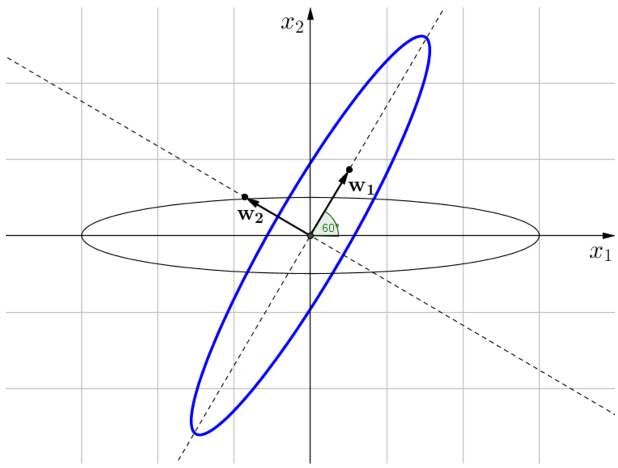
$$1 = U^T D U = (R^T X)^T D R^T X = X^T (R D R^T) X = X^T H X$$

dove

$$H = RDR^T = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} + 3 & \frac{\sqrt{3}}{36} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{36} - \sqrt{3} & \frac{1}{12} + 1 \end{bmatrix}$$

e si vede che la forma quadratica associata alla matrice $H$ è proprio la $\psi$ che si era trovata sopra.

Nella figura sotto si vedono le ellissi $C$ e $\hat{C}$




Consideriamo infine l'ellisse $\hat{C}_v$, che si ottiene traslando $\hat{C}$ con il vettore $v$. Un punto $z = (z_1, z_2)$ di $\mathbf{R}^2$ appartiene a $\hat{C}_v$ se e solo se $z - v$ appartiene a $\hat{C}$ ossia se

$$\left(3 + \frac{1}{36}\right)(z_1 - v_1)^2 + 2\sqrt{3}\left(-1 + \frac{1}{36}\right)(z_1 - v_1)(z_2 - v_2) + \left(1 + \frac{1}{12}\right)(z_2 - v_2)^2 \;=\; 1$$

Sostituendo i valori $v_1 = 2$ e $v_2 = 1$ e sviluppando i quadrati si ottiene una equazione del tipo $f(z_1, z_2) = 0$ dove $f$ è un polinomio di secondo grado che contiene anche i termini di grado uno e di grado zero.

In geometria analitica si chiama *conica* una curva del tipo $f(x_1, x_2) = 0$, dove $f$ è un polinomio di secondo grado. Data una conica è possibile determinare il suo centro, gli assi, i vertici e di che tipo è (ellisse, iperbole, parabola, ...). Qualche strumento per fare questo si studierà nel corso di Analisi 2.

## 11.3 Esercizio **iperbole**

Nel piano $\mathbf{R}^2$ consideriamo la forma quadratica

$$\varphi(x) = 4x_1^2 - 3x_2^2 \tag{11.3.1}$$

e consideriamo l'insieme $C$ dei punti $x = (x_1, x_2)$ per i quali vale $\varphi(x) = 1$. In altre parole l'insieme $C$ è il luogo dei punti del piano che verificano l'equazione

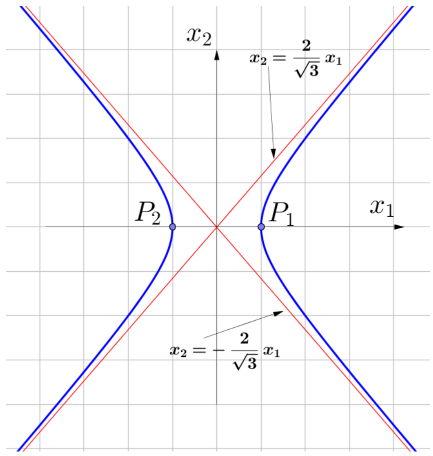
$$4x_1^2 - 3{x_2}^2 = 1 \tag{11.3.2}$$

Questa curva è un esempio di *iperbole*.

i. Si mostri che la curva (11.3.2) è simmetrica rispetto alle rette $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ ed è inoltre simmetrica rispetto all'origine. Si dice pertanto che tale iperbole ha *centro* nell'origine ed ha *assi* di simmetria coincidenti con gli assi coordinati $x_1$ e $x_2$.
Si osservi che, se $x = (x_1, x_2)$ è un punto di $C$ e $x_1$ è grande, allora $\dfrac{x_2}{x_1} \approx \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (per $x_2 > 0$), oppure $\dfrac{x_2}{x_1} \approx -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ( per $x_2 < 0$). Più precisamente si può dire le rette di equazione

$$x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} x_1 \qquad\qquad x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} x_1$$

sono gli asintoti dell'iperbole $C$.
L'iperbole è disegnata nella figura a destra, dove i quadrati della griglia hanno i lati di lunghezza $1/2$.




ii. Si verifichi che le intersezioni dell'iperbole con gli assi coordinati sono i punti $P_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, $P_2 = (-\frac{1}{2}, 0)$ i quali si dicono *vertici* dell'iperbole (11.3.2).

In generale, se $a_1, a_2$ sono numeri positivi, l'insieme

$$E = \{x \mid a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 = 1\} = \{x \mid \varphi(x) = 1\} \tag{11.3.3}$$

dove $\varphi(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$, è un'iperbole che ha centro nell'origine e ha vertici nei punti

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, 0\right), \qquad\qquad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{a_1}}, 0\right),$$

Osserviamo che la forma quadratica $\varphi$, che non ha il termine misto $x_1 x_2$ si scrive anche

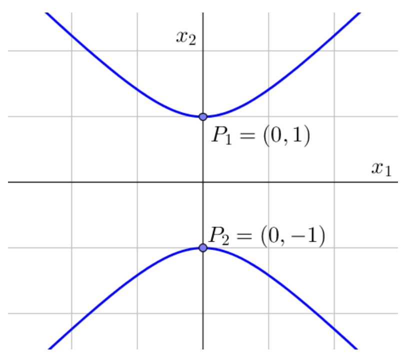
$$\varphi(x) = a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X^T A X \tag{11.3.4}$$

Dove $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$; è una matrice diagonale.

Considerazioni del tutto analoghe si possono fare per le curve del tipo

$$-a_1 x_1^2 + a_2 x^2{}^2 = 1 \tag{11.3.5}$$

Nella figura a destra si vede l'iperbole: $\quad -x_1^2 + x_2^2 = 1$




iii. Si chiama iperbole anche ogni altra curva che si ottiene ruotando o traslando una curva del tipo (11.3.3).

Si consideri l'iperbole $\hat{C}$ che si ottiene ruotando di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario la curva $C$ in (11.3.2) e si trovi la forma quadratica $\psi$ su $\mathbf{R}^2$ che descrive $\hat{C}$, ossia tale che $\hat{C} = \{y \mid \psi(y) = 1\}$.

Si consideri l'iperbole $\hat{C}_v$ che si ottiene traslando con il vettore $v = (2, 1)$ la curva $\hat{C}$ e se ne dia una descrizione analitica come luogo di zeri di un polinomio di secondo grado in due variabili.

**Soluzione**

i. Come il punto i. dell'esercizio precedente.

ii. L'iperbole in (11.3.2) non ha intersezioni con la retta $\{x_1 = 0\}$ perché il sistema $\begin{cases} 4x_1^2 - 3x_2^2 & = & 1 \\ x_1 & = & 0 \end{cases}$ non ha soluzioni reali. Le intersezioni dell'iperbole con la retta $\{x_2 = 0\}$, cioè l'asse $x_1$,

sono invece le soluzioni del sistema $\begin{cases} 4x_1^2 - 3x_2^2 & = & 1 \\ x_2 & = & 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x_1 & = & \pm\frac{1}{2} \\ x_2 & = & 0 \end{cases}$.

iii. L'equazione dell'iperbole $C$ nelle coordinate standard è $1 = 4x_1^2 - 3x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = X^T D X$

La matrice che rappresenta la rotazione $R$ di un angolo $\dfrac{\pi}{2}$ in senso antiorario è $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

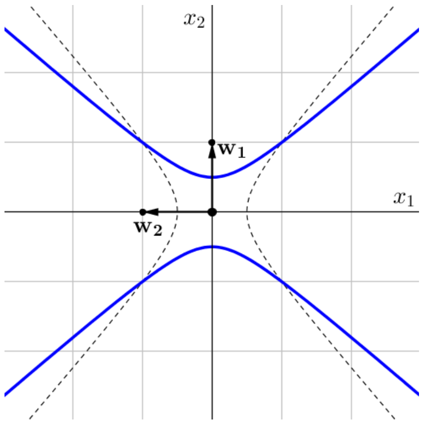
Se $\mathbf{w_1} = R\mathbf{e_1}, \mathbf{w_2} = R\mathbf{e_2}$ sono i vettori che si ottengono ruotando la base canonica e se $u_1, u_2$ sono le coordinate di $x$ nella base $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}$, allora si ha $X = RU$ e $U = R^{-1}X = R^T X$ e l'equazione dell'iperbole ruotata $\hat{C}$ è

$$1 = U^T D U = (R^T X)^T D R^T X = X^T (R D R^T) X = X^T H X$$

dove

$$H = RDR^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

In conclusione l'equazione di $x \in \hat{C}$ se e solo se $-3x_1^2 + 4x_2^2 = 1\}$. L'iperbole $\hat{C}$ è rappresentata nella figura a destra.




L'equazione dell'iperbole traslata $\hat{C}_v$ si trova come nell'esercizio precedente.

## 11.4 Esercizio **forma quadratica, autovalori e autovettori, ellisse**

Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

i. Si trovino gli autovalori e autovettori di $A$ e in particolari si trovi un sistema di riferimento B di $\mathbf{R}^2$ ortonormale e costituito da autovettori.

ii. Si scriva la forma quadratica $a(x_1, x_2)$ associata alla matrice $A$. Utilizzando il sistema di riferimento B, si disegni nel piano cartesiano l'insieme $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid a(x) = 1\}$.

**Soluzione**

i. Calcoliamo gli autovalori della matrice $A$ usando il metodo del polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.
Cerchiamo ora una base per l'autospazio $V_{\lambda_1}$ che è l'insieme delle soluzioni del sistema $(A - \lambda_1 I)X = 0$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $V_{\lambda_1} = \{t(1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$ è lo spazio generato dal vettore $\mathbf{w_1} = (1,1)$.
Procedendo in maniera analoga si ottiene che l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2$ è $V_{\lambda_2} = \{t(-1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$ cioè lo spazio generato dal vettore $\mathbf{w_2} = (-1,1)$.

ii. La forma quadratica associata alla matrice $A$ è

$$a(x_1, x_2) = X^T A X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

Consideriamo l'insieme $E = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid a(x) = 1\} = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1\}$. Per comprendere come è fatto e come disegnarlo, conviene cercare un sistema di riferimento nel quale l'equazione che lo descrive non abbia il termine misto, in modo da ricondursi a uno dei casi studiati negli esercizi precedenti. Questo equivale a diagonalizzare la forma quadratica $a(x_1, x_2)$ ossia a diagonalizzare la matrice simmetrica $A$. Ricordiamo che, presa una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di $A$, e detta $P$ la matrice $2 \times 2$ che contiene come colonne tali vettori di base, allora $P^T A P = D$, dove $D$ è la matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori corrispondenti di $A$.

Nel nostro caso, consideriamo i vettori $\mathbf{w_1} = (1, 1)$ e $\mathbf{w_2} = (-1, 1)$[6] e normalizziamoli:

$$\widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{1} = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{2} = \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Allora $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ e si ha che $D = P^{-1} A P = P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dove si è usato che $P^{-1} = P^T$ $P$ e ciò è vero in quanto $P$ è una matrice ortogonale. Osserviamo anche che $P$ è la matrice di cambio di base da $\mathrm{B} = \{\widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{2}\}$ alla base standard $\mathrm{E} = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ e $P^T$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathrm{E}$ a $\mathrm{B}$. In altre parole, se $x = (x_1, x_2)$ sono le coordinate di un punto nella base canonica e $y = (y_1, y_2)$ sono le coordinate dello stesso punto nella base B, si ha $X = PY$ e $Y = PX$. In conclusione:

la forma quadratica $a(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ diventa $\widetilde{a}(y_1, y_2) = 3y_1^2 + y_2^2$ nelle nuove coordinate $y_1, y_2$

in particolare vale $\qquad a(x_1, x_2) = 1 \iff \widetilde{a}(y_1, y_2) = 1$;

quindi l'insieme $E$, nelle coordinate $y$, è descritto dall'equazione $\widetilde{a}(y_1, y_2) = 3y_1^2 + y_2^2 = 1$ e si vede che è un'ellisse.

[6]Si può notare che la base $W = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$ è orientata concordemente con la base canonica

Dall'equazione $3y_1^2+y_2^2=1$ ricaviamo le coordinate dei vertici dell'ellisse rispetto alla base B

$$P_1=\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}},0\right)_{\mathrm{B}}\,,\;P_2=\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},0\right)_{\mathrm{B}}\,,\;P_3=(0,1)_{\mathrm{B}}\,,\;P_4=(0,-1)_{\mathrm{B}}\,.$$

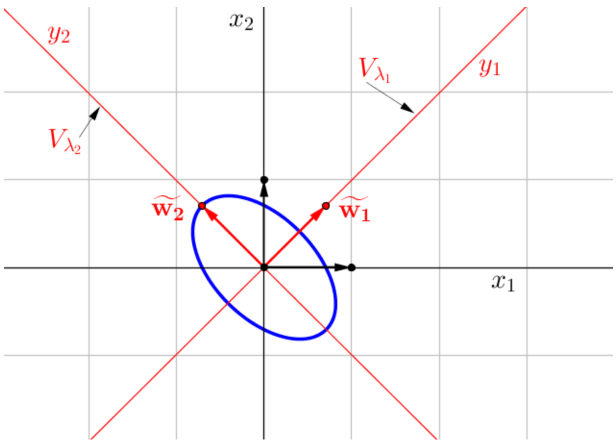
Le coordinate dei vertici rispetto alla base standard si trovano sfruttando la relazione: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$.

Ad esempio,

le coordinate di $P_1$ sono: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

le coordinate di $P_3$ sono: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

La situazione è rappresentata nella figura sotto.




## 11.5 Esercizio **forma quadratica, autovalori e autovettori, iperbole**

Consideriamo la matrice $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{5\sqrt{3}}{4}\\\frac{5\sqrt{3}}{4}&\frac{11}{4}\end{bmatrix}$.

i. Si trovino gli autovalori e autovettori di $B$ e in particolari si trovi un sistema di riferimento B di $\mathbf{R}^2$ ortonormale e costituito da autovettori.

ii. Si scriva la forma quadratica $b(x_1,x_2)$ associata alla matrice $B$. Utilizzando il sistema di riferimento B, si disegni nel piano cartesiano l'insieme $\{x\in\mathbf{R}^2\,\big|\,b(x)=1\}$.

**Soluzione**

i. Calcoliamo gli autovalori della matrice $B$ usando il metodo del polinomio caratteristico:

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\frac{1}{4}-\lambda&\frac{5\sqrt{3}}{4}\\\frac{5\sqrt{3}}{4}&\frac{11}{4}-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4$$

Gli autovalori sono $\lambda_1=4$ e $\lambda_2=-1$.

L'autospazio $V_{\lambda_1}$ è l'insieme delle soluzioni del sistema $(B-\lambda_1 I)X=0$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{15}{4} & \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ \frac{5\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -\frac{15}{4}\left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2\right) & = & 0 \\ \frac{5\sqrt{3}}{4}\left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x_2\right) & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = & \frac{\sqrt{3}}{3}t \\ x_2 & = & t \end{cases}$$

Dunque $V_{\lambda_1} = \left\{t\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \mid t \in \mathbf{R}\right\}$ è lo spazio generato dal vettore $\mathbf{w_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$.
Procedendo in maniera analoga si ottiene che l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2$ è $V_{\lambda_2} = \{t\left(-\sqrt{3}, 1\right) \mid t \in \mathbf{R}\}$ cioè lo spazio generato dal vettore $\mathbf{w_2} = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$.

ii. La forma quadratica associata alla matrice $B$ è

$$b(x_1, x_2) = X^T B X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ \frac{5\sqrt{3}}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2}x_1 x_2 + \frac{11}{4}x_2^2$$

Vogliamo trovare un nuovo sistema di riferimento nel quale la forma quadratica non abbia il termine misto, ossia vogliamo diagonalizzare la matrice $A$. A questo fine, consideriamo gli autovettori $\mathbf{w_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ e $\mathbf{w_2} = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$ di $A$, che sono una base ortogonale di $\mathbf{R}^2$ e normalizziamoli:

$$\widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{1} = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{2} = \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Consideriamo poi la matrice $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ che ha come colonne i vettori $\mathbf{w_i}$.

Si ha allora che

$$D = P^{-1}DP = P^T BP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi la forma quadratica $b$, nelle nuove coordinate $y = (y_1, y_2)$ rispetto alla base $\mathrm{B} = \{\widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{1}, \widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{2}\}$, si scrive $\widetilde{b}(y_1, y_2) = 4y_1^2 - y_2^2$ .

Pertanto l'insieme $C = \{x \mid b(x_1, x_2) = 1\}$ , nelle coordinate $y$ è descritto dall'equazione $4y_1^2 - y_2^2 = 1$ e si vede che è un'iperbole. Gli assi di simmetria di $C$ sono le rette generate dai vettori $\mathbf{w_1}$ e $w_2$ e i vertici sono i punti

$$P_1 = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right)_\mathrm{B} \text{ e } P_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, 0\right)_\mathrm{B}$$

dove il simbolo $(\cdot,\cdot)_\mathrm{B}$ indica che si tratta di coordinate rispetto alla base B

Gli asintoti rispetto alla base B hanno equazioni:

$$y_2 = 2y_1 \qquad\qquad y_2 = -2y_1$$

Scriviamo ora i vertici nelle coordinate $(x_1, x_2)$ rispetto alla base standard. Per far questo utilizziamo la relazione $X = PY$, ossia

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{bmatrix}$$

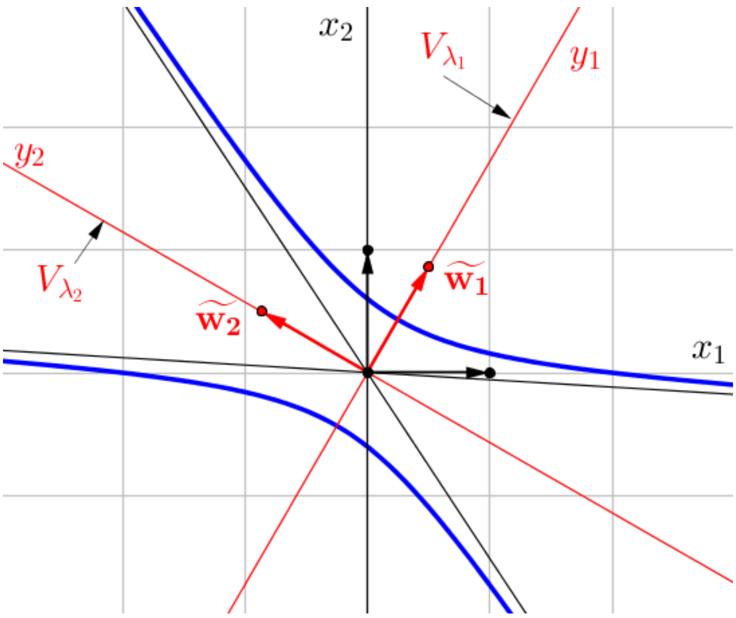
Quindi $P_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ e $P_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Per trovare le equazioni degli asintoti nelle coordnate $x$ si utilizza la relazione $Y = P^T X$ e si ottiene

$$y_2 = 2y_1 \iff x_2 = -\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}x_1$$

$$y_2 = -2y_1 \iff x_2 = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}+1}x_1$$

La situazione studiata nel presente esercizio è rappresentata nella figura sotto:



## 11.6 Esercizio **forme quadratiche, matrici, diagonalizzazione**

Per ciascuna delle seguenti matrici
- si scriva la forma quadratica $\varphi$ corrispondente,
- si trovino gli autovalori e gli autovettori,
- si dica qual è la segnatura di $\varphi$,
- si descriva e si rappresenti graficamente l'insieme di livello $C = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$

$$a)\ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} \qquad d)\ \begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}$$

$$1.\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{bmatrix} \qquad 2.\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \qquad 3.\ \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad 4.\ \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad 5.\ \begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

**Soluzione**

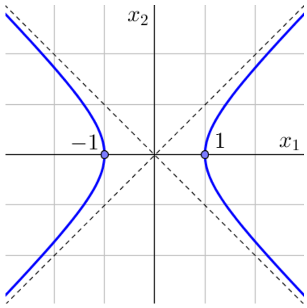
$a)\quad \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2\,.$

La matrice è già diagonalizzata e si vede che l'unico autovalore è $\lambda = 1$ e l'autospazio relativo a tale autovalore è tutto $\mathbf{R}^2$ .

La segnatura della matrice identità è $(2,0,0)$, e con questo si intende che sulla diagonale ci sono due elementi positivi, zero elementi negativi, zero elementi nulli, ma per le matrici $2\times 2$ è più semplice indicare tale segnatura con il simbolo $(+,+)$.

In questo caso l'insieme di livello $C$ è la circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine.

$b)\quad \varphi(x) = x_1^2 - x_2^2\,.$

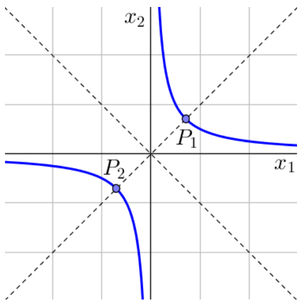



La matrice è diagonale dunque si ha immediatamente che gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, i cui autospazi associati sono rispettivamente $V_{\lambda_1}$ generato dal vettore $\mathbf{e_1}$ e $V_{\lambda_2}$ generato dal vettore $\mathbf{e_2}$ .

La segnatura della matrice considerata è $(1,1,0)$ , che si può indicare anche $(+,-)$.

L'insieme di livello $C$ è l'iperbole, rappresentata nella figura a destra, che ha come vertici i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ e come asintoti le rette $x_2 = x_1$ e $x_2 = -x_1$.

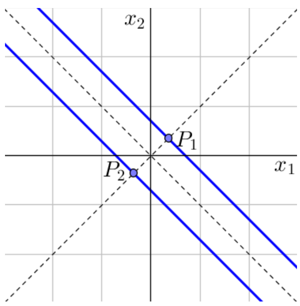
$c)\quad \varphi(x) = 2x_1x_2\,.$




Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ ; i rispettivi autospazi sono $V_{\lambda_1}$ generato ad esempio dal vettore $\mathbf{w_1} = (1,1)$, e $V_{\lambda_2}$ è generato ad esempio dal vettore $\mathbf{w_2} = (-1,1)$ . La segnatura della matrice è $(1,1,0)$ , che si può indicare anche $(+,-)$.

L'insieme di livello $C = \{x \mid 2x_1x_2 = 1\}$ è l'iperbole che ha vertici nei punti $P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e ha come asintoti gli assi coordinati.

$d)\quad \varphi(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$




Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$. L'autospazio $v_{\lambda_1}$ è generato dal vettore $\mathbf{w_1} = (1,-1)$ mentre l'autospazio $V_{\lambda_2}$ è generato dal vettore $\mathbf{w_2} = (1,1)$ . La segnatura è in questo caso $(1,0,1)$, che viene tslvolta indicata anche $(+,0)$..

Notiamo che $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 = (\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2)^2$ .

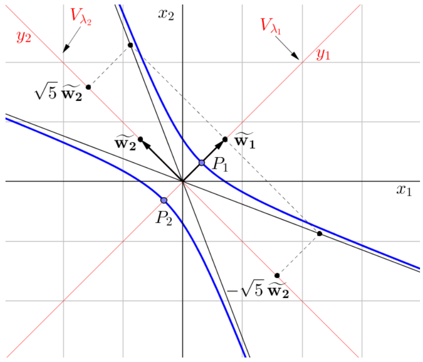
Pertanto l'insieme di livello $C = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$ è costituito dalle due rette parallele:

$$\left\{(x_1, x_2 \mid x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\} \qquad \text{e} \qquad \left\{(x_1, x_2 \mid x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

*e)* $\varphi(x) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$.

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1$ è $V_{\lambda_1} = \{t(1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$ generato dal vettore $\mathbf{w_1} = (1,1)$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2$ è $V_{\lambda_2} = \{t(-1,1) \mid t \in \mathbf{R}\}$ generato dal vettore $\mathbf{w_2} = (-1,1)$. La segnatura è $(1,1,0)$.

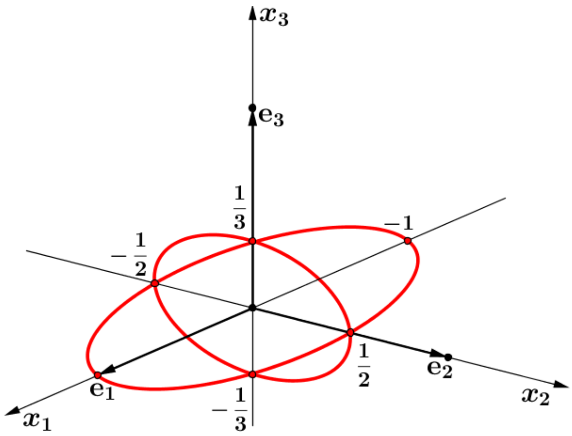
Se $y$ sono le coordinate rispetto alla base ortonormale $\mathrm{B} = \left\{\widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{1} = \frac{\mathbf{w_1}}{\|\mathbf{w_1}\|}, \widetilde{\mathbf{w}}_\mathbf{2} = \frac{\mathbf{w_2}}{\|\mathbf{w_2}\|}\right\}$, la forma quadratica è $\varphi(y) = 5y_1^2 - y_2^2$ e si vede che la curva di livello $C$ in tale base è un'iperbole, che è rappresentata nella figura a destra.




1. $\varphi(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$.

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 9$. L'autospazio relativo a $\lambda_1$ è l'asse coordinato $x_1$, quello relativo a $\lambda_2$ è l'asse coordinato $x_2$ e infine l'autospazio relativo a $\lambda_3$ è l'asse $x_3$. La segnatura è $(3,0,0)$, che si può indicare anche $(+,+,+)$.

Si ha inoltre $C = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1\}$. Una superficie di questo tipo si dice *ellissoide*. Si vede che intersecando $C$ con i piani coordinati o con piani paralleli ai piani cooridnati si ottengono ellissi. Ad esempio: intersecando $C$ col piano $\{x_3 = 0\}$ otteniamo, sul piano $x_1, x_2$, l'ellisse $\{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + 4x_2^2 = 1\}$ che ha vertici in $(\pm 1, 0, 0)$ e $\left(0, \pm\frac{1}{2}, 0\right)$. Intersecando $C$ col piano $\{x_1 = 0\}$ otteniamo l'ellisse $\{(x_2,x_3) \mid 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1\}$ che ha vertici in $\left(0, \pm\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(0, 0, \pm\frac{1}{3}\right)$.




2. $\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$

Gli autovalori sono in questo caso $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = -1$. L'autospazio relativo a $\lambda_1$ è l'insieme $V_{\lambda_1}$ delle soluzioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -2x_3 = 0$$

Quindi $V_{\lambda_1}$ è il piano $\{x_3 = 0\}$ e una sua base è data dai vettori $\mathbf{w_1} = (1,0,0)$ e $\mathbf{w_2} = (0,1,0)$.

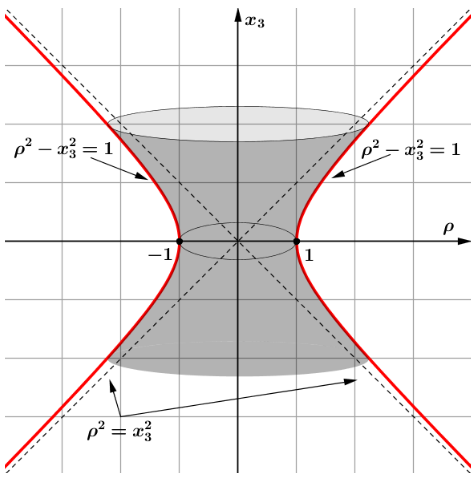
L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$ è $V_{\lambda_2}$, la retta generata dal vettore $\mathbf{w_3} = (0,0,1)$.

La segnatura è $(2,1,0)$, che si indica anche $(+,+,-)$.

Nella figura sulla destra si vede rappresentato l'insieme di livello $C$. Per rappresentarlo abbiamo scelto di porre $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$ sostituendo nella forma quadratica si ha $\varphi(\rho, x_3) = \rho^2 - x_3^2$; la curva di livello nel "piano" $\rho, x_3$ è

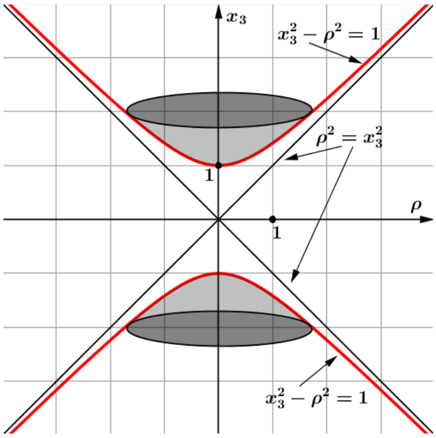
$$C = \{(\rho, x_3) \in \mathbf{R}^2 \times \mid \rho^2 - x_3^2 = 1\}$$

ossia un'iperbole che sappiamo facilmente disegnare. A questo punto, ricordando che abbiamo posto $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$, ruotiamo l'iperbole ottenuto attorno all'asse $x_3$, come si vede nel disegno, e otteniamo la superficie $C$, che si chiama *iperboloide a una falda*.



3. $\varphi(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$.

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$, con molteplicità 2 e $\lambda_2 = 1$. L'autospazio relativo a $\lambda_1$ è il piano $\{x_3 = 0\}$ mentre l'autospazio relativo a $\lambda_2$ è l'asse coordinato $x_3$. La segnatura è $(1,2,0)$, che si indica anche $(-,+,+)$.




Nella figura sulla destra si vede rappresentato l'insieme di livello $C$. Per rappresentarlo abbiamo scelto di porre $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$ sostituendo nella forma quadratica si ha $\varphi(\rho, x_3) = x_3^2 - \rho^2$; la curva di livello nel "piano" $\rho, x_3$ è

$$C = \{(\rho, x_3) \in \mathbf{R}^2 \times \mid x_3^2 - \rho^2 = 1\}$$

ossia un'iperbole che sappiamo facilmente disegnare. Il disegno si completa ricordando che $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$, quindi ruotiamo il nostro iperbole attorno all'asse $x_3$ e otteniamo la superficie $C$, che in questo caso è composta di due parti sconnesse. Tale superficie si dice *iperboloide a due falde*.

4. $\varphi(x) = 2x_1x_2 + x_3^2$

Troviamo gli autovalori col metodo del polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = -1$.

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1$ è $V_{\lambda_1} = \{t(1,1,0) + s(0,0,1) \mid t, s \in \mathbf{R}\}$ generato dai vettori $\mathbf{w_1} = (1,1,0)$ e $\mathbf{w_2} = (0,0,1)$.

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2$ è $V_{\lambda_2} = \{t(1,-1,0) \mid t \in \mathbf{R}\}$ generato dal vettore $\mathbf{w_3} = (1,-1,0)$.

I vettori $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$ e $\mathbf{w_3}$ costituiscono una base ortogonale di autovettori.

La segnatura è $(2,1,0)$, pertanto l'insieme di livello $C$ è un iperboloide a una falda.

5. $\varphi(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$.

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1$ è l'asse coordinato $x_3$ e dunque una sua base è costituita dal vettore $\mathbf{w_1} = (0,0,1)$. L'autospazio relativo a $\lambda_2$ è la retta $\{t(1,-1,0) \mid t \in \mathbf{R}\}$ generata dal vettore $\mathbf{w_2} = (1,-1,0)$. Infine, l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3$ è la retta $\{t(1,1,0) \mid t \in \mathbf{R}\}$ generata dal vettore $\mathbf{w_3} = (1,1,0)$. La segnatura è $(3,0,0)$, dunque l'insieme di livello $C$ è un ellissoide. L'intersezione dell'ellissoide con il piano $x_3 = 0$ è il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ descritto dall'equazione $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1$, che è l'ellisse già studiata nell'esercizio 11.4.

Si dice che una matrice come la numero 5 ha una struttura *a blocchi sulla diagonale*. In questo caso ci sono due blocchi:

un blocco $2 \times 2$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

un blocco $1 \times 1$ $\quad [1]$.

Ogni blocco si può studiare separatamente per determinare autovalori e autospazi.

Università di Trento - Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e in Ingegneria Ambientale - 2015/16

# Corso di Geometria e Algebra lineare - professore Stefano Siboni

Esercizi a cura del prof. Gabriele Anzellotti - realizzati con il supporto del Piano nazionale Lauree Scientifiche 2005-2015

## 12 foglio di esercizi - 6 giugno 2016

**Prodotto scalare, proiezioni ortogonali, simmetrie, prodotto vettoriale.**

### 12.1 Esercizio il prodotto scalare

Sia $E$ un piano euclideo e fissiamo un punto $O \in E$, che chiamiamo *origine*. Ad ogni punto $P \in E$ associamo il vettore $\overrightarrow{OP}$ e anzi decidiamo di identificare il punto $P$ con il vettore $\overrightarrow{OP}$. Parleremo quindi indifferentemente di *somma* di vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ o di punti $P, Q$ nel piano, e di *prodotti* di punti $P$ o vettori $\mathbf{u}$ *per scalari* $t \in \mathbf{R}$.
Consideriamo poi due rette perpendicolari passanti per $O$ e utilizziamole come assi di un sistema di riferimento $Ox_1x_2$. Ad ogni punto $P \in E$ associamo la coppia $x = (x_1, x_2)$ delle coordinate di $P$ in tale sistema di riferimento. In questo modo abbiamo una corrispondenza tra $E$ e $\mathbf{R}^2$, che è un isomorfismo di spazi vettoriali.
Ricordiamo che per ogni punto $P \in \mathbf{R}^2$ la distanza di $P$ dall'origine, che si dice anche norma di $P$ e si denota $\|P\|$, si scrive in termini delle coordinate come

$$\operatorname{dist}(P,O) = \|P\| = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Nel piano $E$ abbiamo anche una nozione di angolo e conosciamo le funzioni trigonometriche, definite nel modo elementare solito. Ricordiamo che si può definire il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ come il numero

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{12.1.1}$$

dove $\theta$ è l'angolo fra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, che assume valori compresi tra zero e $\pi$. Tale definizione è usuale nella fisica elementare. Abbiamo però anche utilizzato un'altra definizione di prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{12.1.2}$$

Per vedere che le due definizioni sono equivalenti in dimensione 2, si può procedere come segue.

1. Per ogni numero $\alpha \in [0, \pi]$, si definisce la matrice

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

   e si considera la funzione lineare $f_\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ associata alla matrice $R_\alpha$; tale funzione si chiama *rotazione di un angolo* $\alpha$ *in senso antiorario*. Grazie all'identificazione di $\mathbf{R}^2$ col piano euclideo $E$, possiamo ora definire le rotazioni nel piano $E$: per ogni $\mathbf{v}$ in $E$, si prendono le sue coordinate $x$, si applica la rotazione in $\mathbf{R}^2$ e si ottiene la coppia $f_\alpha(x)$, si definisce infine $f_\alpha(v)$ come il punto (o vettore) del piano che ha coordinate $f_\alpha(x)$. Con qualche esempio ci si convince facilmente che le rotazioni definite in questo modo sono in effetti quello che devono essere. Si noti che le rotazioni sono in effetti definite per angoli $\alpha \in \mathbf{R}$ qualsiasi. In particolare si osservi che se $\alpha < 0$ la rotazione è in senso orario e che $R_\alpha = R_{\alpha+2\pi}$.

2. Si osserva che il prodotto scalare in (12.1.2) è invariante per rotazioni, ossia

$$\langle x, y\rangle = \langle f_\alpha(x), f_\alpha(y)\rangle \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^2$$

   In particolare si ha

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle f_\alpha(x), f_\alpha(x)\rangle = \|f_\alpha(x)\|^2 \qquad \forall x \in \mathbf{R}^2$$

   e si vede che la norma dei vettori e le distanze fra i punti sono invarianti per rotazioni. Ne segue che una rotazione manda ogni triangolo in un triangolo ad esso congruente e quindi non cambia gli angoli fra i vettori. In conclusione si ottiene che anche il prodotto scalare definito in (12.1.1) è invariante per rotazioni.

3. Se $\mathbf{v}$ ha coordinate $(v_1, v_2)$ allora

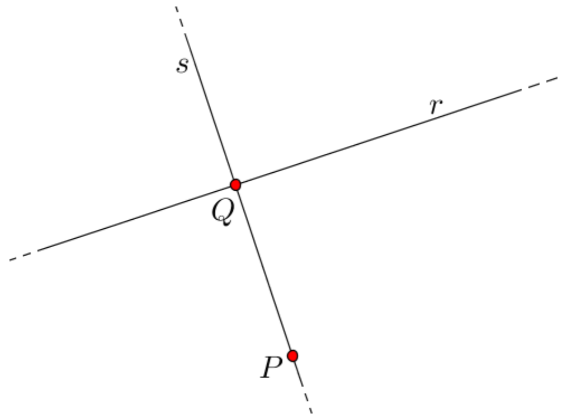
$$\mathbf{v} \cdot k\mathbf{e_1} = kv_1 = \langle (v_1, v_2), (k, 0)\rangle$$

   ossia i due prodotti scalari coincidono se uno dei vettori è del tipo $k\mathbf{e_1}$

4. Comunque presi due vettori $\mathbf{u},\mathbf{v}$ in $E$ e i corrispondenti vettori $x,y$ in $\mathbf{R}^2$, si può trovare una rotazione $f_\alpha$ che porta il vettore $\mathbf{u}$ sull'asse $x_1$, ossia tale che $f_\alpha(\mathbf{u}) = k\mathbf{e_1}$, ossia $f_\alpha(x) = (k,0)$. Dai punti precedenti si ha allora
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = f_\alpha(\mathbf{u})\cdot f_\alpha(\mathbf{v}) = k\mathbf{e_1}\cdot f_\alpha(\mathbf{v}) = \langle (k,0), f_\alpha(y)\rangle = \langle f_\alpha(x), f_\alpha(y)\rangle = \langle x,y\rangle$$

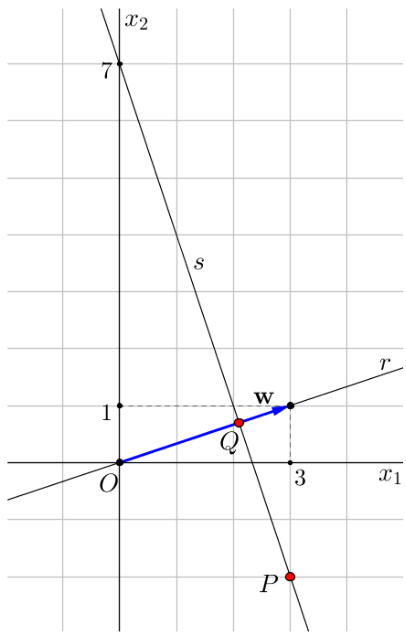
## 12.2 Esercizio **proiezione ortogonale su una retta e simmetria rispetto alla retta, in dimensione due**

Nella geometria euclidea del piano, dati una retta $r$ e un punto $P$ non appartenente alla retta $r$, si dice **proiezione ortogonale** di $P$ su $r$ il punto $Q$ che si ottiene come intersezione di $r$ con la retta $s$ passante per $P$ e perpendicolare a $r$. Si può provare che una tale retta $s$, e quindi la proiezione ortogonale, esiste ed è unica. Si può anche provare che il punto $Q$, tra tutti i punti della retta $r$, è quello che ha minima distanza da $P$. La costruzione della proiezione ortogonale si può ottenere con la riga e il compasso. Noi otterremo gli stessi risultati utilizzando la geometria analitica. Inoltre descriveremo la funzione che manda $P$ nella sua proiezione ortogonale utilizzando il linguaggio delle matrici. Infine descriveremo la simmetria rispetto alla rettta $r$.




Con questi metodi potremo poi trattare la proiezione ortogonale su una retta e su un piano nello spazio e anche su un sottospazio $k$-dimensionale in $\mathbf{R}^n$. La proiezione ortogonale si può anche definire negli spazi di dimensione infinita dove sia dato un prodotto scalare. Ad esempio, la serie di Fourier di una funzione periodica $f$ di periodo $T$ si può collegare in modo illuminante alle proiezioni ortogonali di $f$ su opportuni sottospazi generati dalle funzioni $\sin(k\frac{2\pi}{T}x), \cos(k\frac{2\pi}{T}x)$, utilizzando le nozioni di ortogonalità e distanza rispetto al prodotto scalare $\displaystyle\int_0^T f(x)g(x)dx$.

Consideriamo un piano euclideo $E$ con un sistema di riferimento ortogonale $Ox_1x_2$, che lo identifica allo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ con la base standard $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}$. Sia $\mathbf{w}\in\mathbf{R}^2$ e sia $r = \{t\mathbf{w}\}$ la retta generata da $\mathbf{w}$. La retta $r$ passa quindi per l'origine. Inoltre sia $P$ un punto di $\mathbf{R}^2$. Ci poniamo il problema di determinare la proiezione ortogonale di $P$ sulla retta $r$.
Per fissare le idee e per rappresentare la situazione con un disegno, consideriamo il caso particolare di $\mathbf{w} = (3,1)$ e $P = (3,-2)$; svilupperemo i ragionamenti sia in generale, sia nell'esempio particolare. Nella figura a destra è rappresentata la situazione particolare scelta.




i. Si dimostri che il punto $\qquad Q = \left(P\cdot\dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right)\dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$

appartiene alla retta $r$ e che il vettore $P-Q$ è ortogonale alla retta $r$. Questo dimostra che $Q$ è la proiezione ortogonale di $P$ su $Q$.

ii. Si calcolino le coordinate di $Q$ nel caso particolare sopra indicato.

iii. Si scrivano una equazione parametrica e una equazione cartesiana della retta $s$ passante per $P$ e perpendicolare a $r$.

iv. Si determini il punto $P'$ simmetrico del punto $P$ rispetto alla retta $r$, lo si rappresenti con un disegno e si calcolino le sue coordinate nel caso particolare indicato sopra.

v. Si consideri la funzione $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che manda ogni punto $P \in \mathbf{R}^2$ nella sua proiezione ortogonale $Q$ su $r$. Si mostri che $g$ è una funzione lineare e si scriva la matrice $A$ che la rappresenta nella base standard.
Si consideri la funzione $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che manda ogni punto $P \in \mathbf{R}^2$ nel vettore $P - Q$ dove $Q$ è la proiezione ortogonale di $P$ su $r$. Si mostri che $h$ è una funzione lineare e si scriva la matrice $B$ che la rappresenta nella base standard.
Si consideri la funzione $\sigma : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che manda ogni punto $P \in \mathbf{R}^2$ nel punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto a $r$. Si mostri che $\sigma$ è una funzione lineare e si scriva la matrice $S$ che la rappresenta nella base standard.

**Soluzione**

i. Il punto $Q$ appartiene alla retta $r$, poiché $Q = t\mathbf{w}$ dove $t = \dfrac{P \cdot w}{\|w\|^2}$. Inoltre si ha

$$Q \cdot (P - Q) = Q \cdot P - Q \cdot Q = \left(P \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right)\left(\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \cdot P\right) - \left(P \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right)^2 \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = 0$$

quindi il vettore $P - Q$ è ortogonale al vettore $Q$, ossia è ortogonale alla retta $r$.

ii. Nel caso particolare considerato, in cui $w = (3,1)$ e $P = (3,-2)$ si ha

$$Q = \frac{P \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} = \frac{(3,1) \cdot (3,-2))}{10}(3,1) = \frac{7}{10}(3,1) = \left(\frac{21}{10}, \frac{7}{10}\right)$$

iii. In generale, una equazione parametrica della retta $s$ è ad esempio $\{P + t(P - Q) \mid t \in \mathbf{R}\}$.
Nel caso particolare si ha

$$P - Q = (3,-2) - \left(\frac{21}{10}, \frac{7}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}, \frac{-27}{10}\right)$$

e quindi la formula generale diventa

$$(3,-2) + t\left(\frac{9}{10}, \frac{-27}{10}\right) \qquad t \in \mathbf{R}$$

ma si vede che come vettore direttore conviene prendere $(1,-3) = \dfrac{10}{9}(P - Q)$ e si ottiene l'espressione più semplice

$$(3,-2) + t(1,-3) \qquad t \in \mathbf{R}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x_1 = 3 + t \\ x_2 = -2 - 3t \end{cases}$$

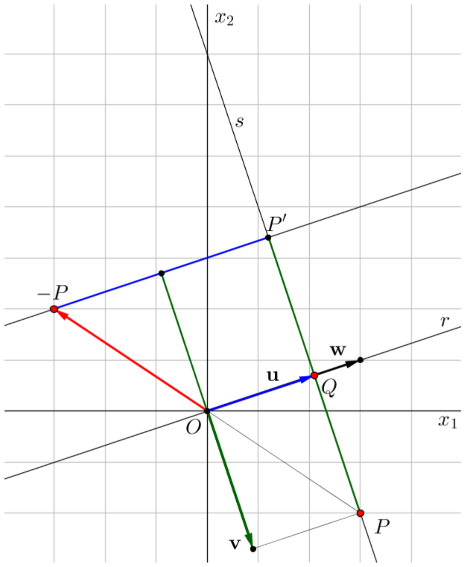
Una equazione cartesiana si ottiene eliminando la variabile $t$ nelle equazioni parametriche qui sopra. Ad esempio, dalla prima equazione parametrica si ricava $t = x_1 - 3$ e scrivendo questa espressione nella seconda equazione parametrica si ottiene l'equazione cartesiana

$$x_2 = -3x_1 + 7$$

Da questa si vede immediatamente che la pendenza è $-3$ e l'intersezione con l'asse $x_2$ è il punto $(0,7)$.

Osserviamo che un altro modo, che non usa le equazioni parametriche ed è più usuale nella geometria analitica piana, per trovare la proiezione ortogonale di $P$ su $r$ è partire dalla pendenza di $r$, che è $m = \frac{1}{3}$ e poi scrivere l'equazione cartesiana della retta $s$ utilizzando ad esempio la formula generale del fascio di rette passante per $P$ e usando il fatto che la pendenza della perpendicolare $s$ è $-\frac{1}{m} = -3$; infine le coordinate di $Q$ si trovano come la coppia che verifica le equazioni di entrambe $r$ e $s$.

Questo metodo però non si trasporta agevolmente nello spazio tre-dimensionale, e ancora meno in dimensione maggiore; consigliamo quindi di utilizzare le equazioni parametriche come si è visto sopra.




iv. Per trovare il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto alla retta $r$ conviene osservare che per arrivare a $P'$ si parte da $P$, si procede in direzione ortogonale a $r$ fino ad arrivare a $Q$ e poi si deve proseguire per altrettanta strada; in altre parole si ha

$$P' = P + 2(Q-P) = -P + 2Q = -P + 2\frac{P\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

La situazione è rappresentata nella figura a destra. Nell'esempio considerato si ha

$$P' = -(3,-2) + 2\left(\frac{21}{10}, \frac{7}{10}\right) = \left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$$

v. In questo punto vedremo che le operazioni considerate nei punti precedenti sono trasformazioni lineari da $\mathbf{R}^2$ in sé e si possono descrivere con il linguaggio delle matrici. Consideriamo la funzione $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che proietta i punti sulla retta $r$ e osserviamo che dalla sua espressione $g(P) = \left(P\cdot\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right)\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$ si vede subito che è lineare, poiché il prodotto scalare è lineare rispetto alla prima variabile, quando la seconda è fissata. La matrice $A$ che rappresenta $g$ ha come colonne le immagini dei vettori della base canonica:

$$g(\mathbf{e_1}) = \frac{\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} = \frac{w_1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \qquad g(\mathbf{e_2}) = \frac{\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} = \frac{w_2}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Pertanto si ha $A = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1w_1 & w_2w_1 \\ w_1w_2 & w_2w_2 \end{bmatrix}$.

Osserviamo che si ha

$$\begin{bmatrix} w_1w_1 & w_2w_1 \\ w_1w_2 & w_2w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} = WW^T$$

La matrice due per due $WW^T$, da non confondersi con la matrice uno per uno $W^TW$, si chiama *prodotto tensoriale* del vettore $\mathbf{w}$ per se stesso e si denota anche $\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}$. Possiamo quindi anche scrivere

$$A = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\otimes\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \tag{12.2.1}$$

Infine, se il vettore $\mathbf{w}$ ha modulo unitario, allora la matrice della proiezione si scrive semplicemente $A = \mathbf{w}\otimes\mathbf{w}$.

Nel caso particolare considerato si ha $A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/10 & 3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$.

Consideriamo poi la funzione $h(P) = P - Q = id(P) - g(P)$. Evidentemente essa è lineare e la matrice che la rappresenta è

$$B = I - A = I - \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\left(\begin{bmatrix} w_1^2+w_2^2 & 0 \\ 0 & w_1^2+w_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1^2 & w_1w_2 \\ w_1w_2 & w_2^2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_2^2 & -w_1w_2 \\ -w_1w_2 & w_1^2 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso l'espressione si semplifica se il modulo di $\mathbf{w}$ è uguale a uno.

Nel nostro caso particolare si ha $B = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -3 & 9 \end{bmatrix}$.

Concludiamo con la funzione $\sigma$ che manda il punto $P$ nel punto simmetrico di $P$ rispetto alla retta $r$. Si vede dall'espressione di $\sigma(P) = P'$ che la funzione è lineare e la matrice $S$ che la rappresenta è

$$S = -I + \frac{2}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\left(-I\|\mathbf{w}\|^2 + 2\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1^2 - w_2^2 & 2w_1w_2 \\ 2w_1w_2 & w_2^2 - w_1^2 \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso particolare si ha $S = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{bmatrix}$ e si nota che $S$ è una matrice ortogonale e $\det S = -1$, come deve essere per una simmetria.

## 12.3 Esercizio **proiezione ortogonale su una retta che non passa per l'origine e simmetria rispetto alla retta, in dimensione due**

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ con la base standard e la struttura euclidea data dal prodotto scalare standard. Consideriamo la retta $r$ di equazione $2x + y + 2 = 0$ e il punto $P = (1,3)$.

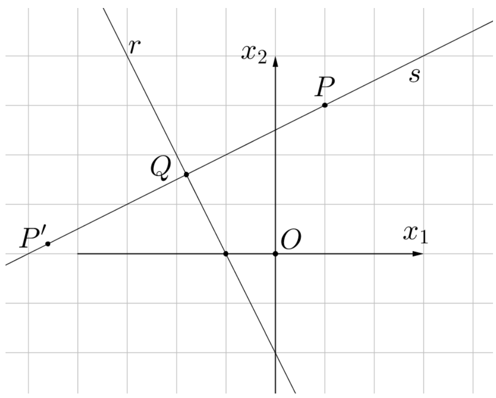
i. Si determini la proiezione ortogonale $Q$ di $P$ su $r$ e si rappresenti la situazione con un disegno.

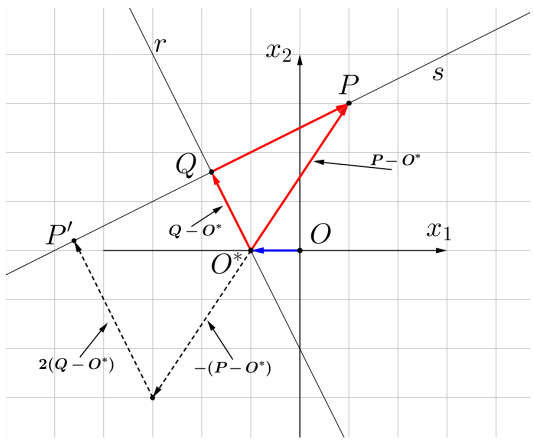
ii. Si determini il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto alla retta $r$ e lo si rappresenti sul disegno.

iii. Per un generico punto $x = (x_1, x_2)$ in $\mathbf{R}^2$, sia $y = (y_1, y_2)$ la proiezione ortogonale di $x$ su $r$. Si scriva $y$ in termini di $x$, ossia si descriva analiticamente la funzione $y = g(x)$. Si dica se la funzione $g$ è lineare.

iv. Per un generico punto $x = (x_1, x_2)$ in $\mathbf{R}^2$, sia $z = (z_1, z_2)$ il punto simmetrico di $x$ rispetto a $r$. Si scriva $z$ in termini di $x$, ossia si descriva analiticamente la funzione $z = \sigma(x)$. Si dica se la funzione $\sigma$ è lineare.

### Soluzione




I dati del problema sono rappresentati nella figura a destra in alto. In particolare si vedono il punto $P$ e la retta $r$. Inoltre sono stati rappresentati graficamente la retta $s$ passante per $P$ e perpendicolare a $r$; l'intersezione $Q$ di $s$ con $r$, che è la proiezione ortogonale di $P$ su $r$; il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto a $r$. L'esercizio chiede di determinare le coordinate di $Q$ e di $P$, e poi di descrivere analiticamente le funzioni $g$ (*proiezione su* $r$) e $\sigma$ (*simmetria rispetto a* $r$).

Rispetto all'esercizio precedente c'è una differenza: in questo caso la retta $r$ non passa per l'origine; inoltre la retta è assegnata mediante la sua equazione cartesiana, anziché mediante un'equazione parametrica. Tuttavia si possono molto facilmente adattare i metodi già usati. Per prima cosa ci procuriamo una descrizione parametrica della retta $r$, che cerchiamo più comoda possibile. Ad esempio possiamo osservare che la retta passa per i punti $(-1,0)$ e $(-2,2)$ e ha il vettore $\mathbf{w} = (-1,2)$ come vettore direttore. Con riferimento alla figura sotto a destra, osserviamo poi che ci si può ricondurre ai ragionamenti dell'esercizio precedente prendendo come riferimento il punto $O^* = (-1,0)$, che pensiamo come se fosse una nuova origine (ma non serve passare a un altro sistema di riferimento). Precisamente osserviamo che

$$Q - O^* = \frac{(P - O^*)\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} \qquad P' - O^* = -(P - O^*) + 2(Q - O^*) \tag{12.3.1}$$

Nel caso particolare che viene considerato si ha $P-O^*=(2,3)\,,\quad (P-O^*)\cdot\mathbf{w}=4\,,\quad \|\mathbf{w}\|^2=5$ e quindi

$$Q-O^*=\left(-\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)\qquad\qquad P'-O^*=\left(-\frac{18}{5},\frac{1}{5}\right)$$

da cui si ottengono le risposte ai punti i e ii dell'esercizio:

$$Q=O^*+(Q-O^*)=\left(-\frac{9}{5},\frac{8}{5}\right)\qquad\qquad P'=O^*+(P-O^*)=\left(-\frac{23}{5},\frac{1}{5}\right)$$

Consideriamo ora i successivi punti iii e iv. Per scrivere una espressione analitica delle funzioni $g$ e $\sigma$ è sufficiente riprendere le (12.3.1) scrivendo $X$ al posto di $P$, $Y$ al posto di $Q$ e $Z$ al posto di $P'$. Abbiamo allora, come nell'esercizio precedente,

$$Y-O^*=\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1^2 & w_1w_2\\ w_1w_2 & w_2^2\end{bmatrix}(X-O^*)$$

dove

$$\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1^2 & w_1w_2\\ w_1w_2 & w_2^2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/5 & -2/5\\ -2/5 & 4/5\end{bmatrix}$$

e, in conclusione,

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1/5 & -2/5\\ -2/5 & 4/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1+1\\ x_2\end{bmatrix}$$

ossia le componenti $f_1,f_2$ della funzione $f$ sono

$$y_1=f_1(x_1,x_2)=-1+\frac{1}{5}(x_1+1)-\frac{2}{5}x_2\qquad\qquad y_2=f_2(x_1,x_2)-\frac{2}{5}(x_1+1)+\frac{4}{5}x_2$$

La funzione $f$ non è lineare ad esempio perché non manda l'origine nell'origine. Questo è evidente sia dall'espressione algebrica qui sopra, sia dal significato geometrico della funzione, poiché la proiezione dell'origine deve andare sulla retta $r$, che per l'origine non passa. In generale, la proiezione su una retta (o su un piano ) è lineare se e solo se la retta (o il piano) passa per l'origine.

iv. In modo del tutto simile, partendo dalla seconda equazione in (12.3.1) si ottiene l'espressione analitica della simmetria $\sigma$:

$$Z-O^*=-(X-O^*)+2(Y-O^*)=\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\left(-\begin{bmatrix} w_1^2+w_2^2 & 0\\ 0 & w_1^2+w_2^2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} w_1^2 & w_1w_2\\ w_1w_2 & w_2^2\end{bmatrix}\right)(X-O^*)$$

ossia

$$Z=O^*+\frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1^2-w_2^2 & 2w_1w_2\\ 2w_1w_2 & w_2^2-w_1^2\end{bmatrix}(Z-O^*)$$

che nel nostro caso diventa

$$\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3/5 & -4/5\\ -4/5 & 3/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1+1\\ x_2\end{bmatrix}$$

da cui si possono ricavare le $z_i$ in funzione delle $x_i$. Osserviamo infine, ma era già chiaro dall'inizio, che la simmetria $\sigma$ in questo caso non è lineare.

In generale, la simmetria rispetto a una retta (o rispetto a un piano) è lineare se e solo se la retta (o il piano) passa per l'origine.

### 12.4 Esercizio **proiezione ortogonale su una retta $r$ nello spazio, simmetria rispetto alla retta $r$, piano $r^\perp$ ortogonale alla retta $r$, proiezione sul piano $r^\perp$, simmetria rispetto al piano $r^\perp$**

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ con la base standard e la struttura euclidea data dal prodotto scalare standard. Consideriamo la retta $r$ generata dal vettore $\mathbf{w} = (3,2,1)$ e consideriamo inoltre il punto $P = (2,1,0)$.

i. Si determini la proiezione ortogonale $Q$ di $P$ su $r$ e si rappresenti la situazione con un disegno.

ii. Per un generico punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbf{R}^3$, sia $y = (y_1, y_2, y_3)$ la proiezione ortogonale di $x$ su $r$. Si scriva $y$ in termini di $x$, ossia si descriva analiticamente la funzione $y = g(x)$.

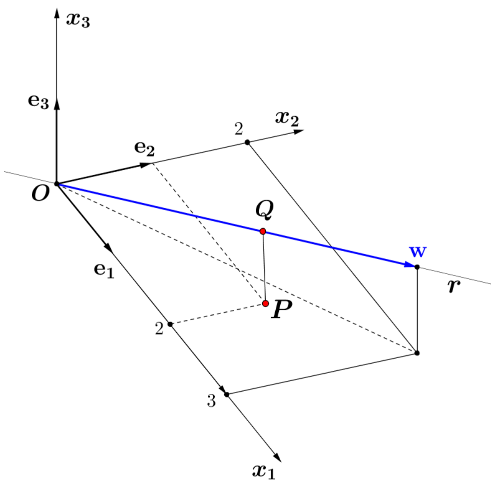
iii. Si osservi che la proiezione $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è una funzione lineare che ha come immagine la retta $r$ (e ha quindi rango 1). Il nucleo di $g$, ossia l'insieme dei vettori che si proiettano sull'origine, è uno spazio vettoriale che si chiama *spazio (o piano) ortogonale di* $r$ e si denota ad esempio $r^\perp$. Geometricamente è evidente, e segue peraltro dal teorema nullità più rango, che la dimensione di $r^\perp$ è due. Il punto $P - Q$ appartiene al piano ortogonale $r^\perp$ e si chiama *proiezione ortogonale di $P$ su $r^\perp$*. Si osservi che la funzione che ad ogni $x \in \mathbf{R}^3$ associa la proiezione $u = h(x)$ di $x$ sul piano $r^\perp$ è lineare e si scriva la matrice $B$ che la rappresenta nella base standard di $\mathbf{R}^3$.

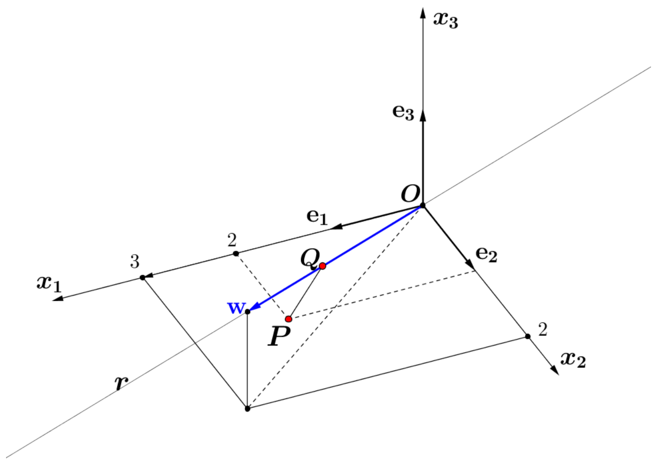
iv. Si trovi il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto alla retta $r$. Inoltre, per un generico punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbf{R}^3$, sia $z = \sigma(x)$ il punto simmetrico di $x$ rispetto a $r$. Si scriva $z$ in termini di $x$, ossia si trovi la matrice $S$ che rappresenta la funzione lineare $\sigma$.

v. Si trovi il punto $P''$ simmetrico di $P$ rispetto al piano $r^\perp$. Inoltre, per un generico punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbf{R}^3$, sia $u = \eta(x)$ il punto simmetrico di $x$ rispetto al piano $r^\perp$. Si trovi la matrice $M$ che rappresenta la funzione lineare $\eta$.

#### Soluzione

Nelle figure sotto è rappresentata la situazione del problema, da due punti di vista differenti. In particolare si vedono il vettore $\mathbf{w}$, la retta $r$ generata da $\mathbf{w}$ e il punto $P$. Inoltre è stato rappresentato graficamente il punto $Q$ proiezione di $P$ su $r$.




L'esercizio chiede al punto i di determinare le coordinate di $Q$. Poiché la retta $r$ passa per l'origine, il punto $P$ si identifica con il vettore $\overrightarrow{OP}$ e il punto $Q$ si identifica con il vettore $\overrightarrow{OQ}$. La proiezione si trova quindi con la solita formula

$$Q = \left(P \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{(2,1,0)\cdot(3,2,1)}{14}(3,2,1) = \left(\frac{12}{7}, \frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

Il punto ii chiede di scrivere una espressione analitica per la funzione $g$ che al vettore $x$ associa la sua proiezione $y$ su $r$. Sempre con la solita formula scriviamo

$$Y = \left(X \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$

da cui si vede che la funzione $g$ è lineare ed è quindi rappresentata rispetto alla base canonica da una matrice $A$ tre per tre; si ha cioè $Y = AX$. Le colonne della matrice $A$ sono le immagini, ossia le proiezioni su $r$, dei vettori della base canonica. Analogamente a quanto fatto nell'esercizio 12.2 abbiamo

$$g(\mathbf{e_1}) = \frac{w_1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \qquad g(\mathbf{e_2}) = \frac{w_2}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \qquad g(\mathbf{e_3}) = \frac{w_2}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$A = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1w_1 & w_2w_1 & w_3w_1 \\ w_1w_2 & w_2w_2 & w_3w_2 \\ w_1w_3 & w_2w_3 & w_3w_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}WW^T = \frac{\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}$$

Nel caso in esame si ha $A = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e si può verificare che in effetti $Q = AP$.

iii. Osserviamo che $h(x) = x - g(x)$, quindi la funzione $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ è lineare ed è rappresentata dalla matrice

$$B = I - A = I - \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_2^2 + w_3^2 & w_2w_1 & w_3w_1 \\ w_1w_2 & w_1^2 + w_3^2 & w_3w_2 \\ w_1w_3 & w_2w_3 & w_1^2 + w_2^2 \end{bmatrix}$$

Nel caso in esame si ha

$$B = \begin{bmatrix} 5/14 & -6/14 & -3/14 \\ -6/14 & 10/14 & -2/14 \\ -3/14 & -2/14 & 13/14 \end{bmatrix}$$

L'immagine di $h$ è il piano ortogonale a $r$ e ha dimensione 2. Quindi la matrice $B$ deve avere rango 2. Lo studente faccia la verifica riducendo la matrice $B$ a scala.

iv. Come nell'esercizio 12.2, si ha $P' = P - 2(P - Q) = -P + 2Q$ . Si ottiene quindi $P' = \left(\frac{10}{7}, \frac{9}{7}, \frac{8}{7}\right)$ . Usando la stessa idea, per la matrice $S$ si ottiene la formula seguente

$$S = -I + \frac{2}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\left(-I\|\mathbf{w}\|^2 + 2\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\begin{bmatrix} w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 & 2w_2w_1 & 2w_3w_1 \\ 2w_1w_2 & -w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 & 2w_3w_2 \\ 2w_1w_3 & 2w_2w_3 & -w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 \end{bmatrix}$$

Lasciamo al lettore di scrivere la matrice $S$ nel caso in esame e poi verificare che $P' = SP$ dove il valore di $P'$ è già stato calcolato indipendentemente sopra.

v. Ragionando come nei casi precedenti si ha

$$P'' = P - 2Q = P - 2g(P) = \left(-\frac{10}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{8}{7}\right)$$

In effetti è vero in generale che $P'' = P - 2Q = -(-P + 2Q) = -P'$ !!

In conclusione si ha

$$\eta(x) = -\sigma(x) \qquad\qquad M = -S$$

## 12.5 Esercizio **proiezione ortogonale su un piano di cui si conosce l'equazione cartesiana, simmetria rispetto al piano**

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ con la base standard e la struttura euclidea data dal prodotto scalare standard. Consideriamo il piano $\alpha$ di equazione $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e il punto $P = (1, 5, -3)$.

i. Si determini la proiezione ortogonale $h(P)$ di $P$ su $\alpha$.

ii. Si trovi il punto $P^*$ simmetrico di $P$ rispetto al piano $\alpha$.

**Soluzione**

Osserviamo che l'equazione del piano $\alpha$ si può scrivere nella forma $\mathbf{w} \cdot x = 0$ dove $\mathbf{w} = (3,1,-1)$ è il vettore dei coefficienti. Questo significa che il vettore $w$ è ortogonale a tutti i vettori del piano $\alpha$, ossia che la retta $r$ generata da $\mathbf{w}$ è perpendicolare al piano $\alpha$. Chiamiamo $g(P)$ la proiezione ortogonale di $P$ su $r$. Allora si ha $h(P) = P - g(P)$. Nel caso in esame si ha

$$g(P) = \left(P \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = (3,1,-1) \qquad\qquad h(P) = (-2,4,2)$$

Il punto $P^*$ simmetrico di $P$ rispetto al piano $\alpha$ è $P^* = P - 2g(P) = (-5,3,-1)$ .

## 12.6 Esercizio **proiezione ortogonale sul piano generato da due vettori $a, b$ in $\mathbf{R}^3$, retta ortogonale al piano e prodotto vettoriale $a \times b$**

Consideriamo i vettori $\mathbf{a} = (-1,3,0)$ e $\mathbf{b} = (-2,0,1)$ nello spazio $\mathbf{R}^3$, dove prendiamo il prodotto scalare standard.

i. Si determini la retta $\beta$ dei vettori che sono ortogonali a tutti i vettori del piano $\alpha$ generato da **a** e **b**.

ii. Sia $r$ la retta generata dal vettore $P = (4,1,2)$. Si scriva un'equazione parametrica della retta $s$ proiezione ortogonale di $r$ su $\alpha$.

iii. Si scriva la matrice della proiezione ortogonale $h$ su $\alpha$.

**Soluzione**

Un vettore $x \in \mathbf{R}^3$ è ortogonale a tutti i vettori del piano $\alpha$, generato da **a** e **b**, se e solo se $\begin{cases} \mathbf{a} \cdot x &= 0 \\ \mathbf{b} \cdot x &= 0 \end{cases}$

ossia se $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 \end{cases}$ cioè $AX = 0$ dove $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se i vettori **a** e **b** sono linearmente indipendenti, come è in questo caso, allora la matrice $A$ ha rango 2 e quindi almeno una sottomatrice $2 \times 2$ di $A$ ha rango due. In questo caso ad esempio le prime due colonne sono linearmente indipendenti e perciò possiamo trovare una soluzione del sistema $AX = 0$ procedendo come segue: fissiamo $x_3 = 1$, riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 &= -a_3x_3 = -a_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 &= -b_3x_3 = -b_3 \end{cases}$$

otteniamo quindi

$$x_1 = \frac{m_{23}}{m_{12}} \qquad x_2 = \frac{-m_{13}}{m_{12}} \qquad x_3 = 1$$

dove

$$m_{13} = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} \qquad m_{23} = \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} \qquad m_{12} = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

A questo punto moltiplichiamo la soluzione trovata per $m_{12}$ e otteniamo un'altra soluzione più simmetrica:

$$\mathbf{w} = (m_{23}, -m_{13}, m_{12}) \tag{12.6.1}$$

La retta ortogonale al piano $\alpha$ è quindi costituita dai vettori del tipo $t\mathbf{w}$, per $t \in \mathbf{R}$.

Nel nostro caso si ha $\mathbf{w} = (3, 1, 6)$ .

Osserviamo che il vettore **w** è funzione dei vettori **a** e **b** e si vede immediatamente che la funzione $\mathbf{w} = \psi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

- è lineare nella variabile **a**, tenendo **b** fissato;
- è lineare nella variabile **b**, tenendo **a** fissato
- cambia segno se si scambiano **a** e **b**, ossia è *antisimmetrica*.

In effetti il vettore $\mathbf{w} = \psi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ non è altro che il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ma non dimostriamo questo fatto.

Ricordiamo che il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ si scrive come il *determinante simbolico (o formale)*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = m_{23}\mathbf{e_1} - m_{13}\mathbf{e_2} + m_{12}\mathbf{e_3}$$

dove si è sviluppato il determinante con la regola di Laplace rispetto alla prima riga.

ii. Poiché la proiezione ortogonale $h$ su $\alpha$ è una funzione lineare, la proiezione della retta $r$ generata da $P$ è la retta $s$ generata dal vettore $h(P)$. Per trovare la proiezione $h(P)$ conviene considerare la proiezione $g$ sulla retta ortogonale $r$ e scrivere $h(P) = P - g(P)$. Abbiamo quindi

$$g(P) = \left(P \cdot \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}\right) \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{(4,1,2)\cdot(3,1,6)}{46}(3,1,6) = (\frac{75}{46}, \frac{25}{46}, \frac{150}{46})$$

$$h(P) = P - g(P) = \left(\frac{109}{46}, \frac{21}{46}, -\frac{58}{46}\right)$$

Infine, la retta $s$ è la retta generata da $h(P)$.

iii. La matrice che rappresenta la proiezione $h$ è

$$B = I - A = I - \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|^2} \begin{bmatrix} w_2^2 + w_3^2 & -w_2 w_1 & -w_3 w_1 \\ -w_1 w_2 & w_1^2 + w_3^2 & -w_3 w_2 \\ -w_1 w_3 & -w_2 w_3 & w_1^2 + w_2^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{46} \begin{bmatrix} 37 & -3 & -18 \\ -3 & 45 & -6 \\ -18 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

# Indice