Università degli Studi di Trento – Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica – CdL in Fisica a.a. 2020/21
PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA A/1
a.a. 2020/21 – Trento, 7 novembre 2020

1. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-8x}-2|x|\right) \underset{[\infty-\infty]}{=}$

$$\sqrt{4x^2-8x}-2|x| \underset{\text{per } x\to-\infty}{=} \sqrt{4x^2-8x}+2x = \frac{\left(\sqrt{4x^2-8x}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-8x}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-8x}-2x}$$

$$= \frac{\cancel{4x^2}-8x-\cancel{4x^2}}{-2x\sqrt{1-\frac{2}{x}}-2x} = \frac{\cancel{-8}^{\,4}\cancel{x}}{\cancel{-2}\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \underline{\underline{2}}$$

$$\sqrt{4x^2-8x} = \sqrt{4x^2\left(1-\frac{8x}{4x^2}\right)} \underset{x\to-\infty}{=} -2x\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

ricordare $\sqrt{x^2}=|x|$

$\square$

Risposta: (d)

2. $\lim_{x\to1}\frac{x-x^2}{\sqrt{2-x}-1} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$$\frac{x-x^2}{\sqrt{2-x}-1} = \frac{(x-x^2)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)} = \frac{x(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{2-x-1}$$

$$= \frac{x\cancel{(1-x)}\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\cancel{1-x}} \xrightarrow[x\to1]{} \underline{\underline{2}}$$

$\square$

Risposta: (b).

3. $\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{\sin(x^2-x)} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$$\frac{e^{x-1}-1}{\sin(x^2-x)} = \frac{e^{x-1}-1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{\sin(x^2-x)}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}}_{\xrightarrow{x\to1}1}\cdot\underbrace{\frac{x^2-x}{\sin(x^2-x)}}_{\xrightarrow{x\to1}1}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x\to1}1} \xrightarrow[x\to1]{} 1$$

NOTA: Svolgiamo i limiti usando solo i limiti notevoli e il teorema del limite di funzioni composte. Ovviamente si può procedere anche usando il teorema di de L'Hôpital oppure gli sviluppi di Taylor.

$\lim_{x\to0}\frac{4\,\mathrm{tg}\,x^2}{1-\cos(3x)} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$

$$\frac{4\,\mathrm{tg}\,x^2}{1-\cos(3x)} = 4\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{tg}\,x^2}{x^2}}_{\to1\ (x\to0)}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{(3x)^2}}_{\to\frac{1}{9}}\cdot\underbrace{\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}}_{\to2} \xrightarrow[x\to0]{} \frac{4}{9}\cdot2 = \frac{8}{9} < 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin(3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \underbrace{\frac{\log(1+2x)}{2x}}_{\downarrow x\to 0 \atop 1} \cdot \frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}} \cdot \underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\downarrow x\to 0 \atop 1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{3} < 1.$$

<u>Risposta : (d).</u> $\square$

4. $$\lim_{x\to 0^+} (3x)^x = [0^0] \qquad (3x)^x = e^{\overbrace{x\log 3x}^{\to 0}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = [0^\infty]$$ non è una forma indeterminata!

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\overbrace{\frac{\log x}{x}}^{\to -\infty}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\log x} = [\infty^\infty]$$ non è una forma indeterminata!

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\log x} = e^{\log x \log 1/x} = e^{-(\log x)^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

<u>Risposta : (c).</u> $\square$

5. $f(x) = \dfrac{-x^2+2x}{2x+1}$: Per determinare i coefficienti a e b della retta $y = ax+b$ (asintoto obliquo) si può procedere in due modi:

<u>1° modo</u> : Calcoliamo $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-x^2+2x}{2x^2+x}\right) = -\frac{1}{2} = a$

$$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - ax\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{-x^2+2x}{2x+1} - \left(-\frac{1}{2}x\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{-x^2+2x}{2x+1} + \frac{x}{2}\right] =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{\cancel{-2x^2}+4x+\cancel{2x^2}+x}{2(2x+1)}\right] = \frac{5}{4} = b$$

<u>2° modo</u> : $-x^2+2x : 2x+1 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

$$\begin{array}{l} -x^2 - \frac{1}{2}x \\ + \quad + \\ \hline / \quad \frac{5}{2}x \\ \quad -\frac{5}{2}x - \frac{5}{4} \\ \hline \quad / \quad -\frac{5}{4} \end{array}$$

$\Rightarrow a+b = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}$
$= \frac{3}{4} \in]0,1]$

Quindi $$f(x) = \frac{-x^2+2x}{2x+1} = \underbrace{-\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}}_{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}} - \frac{5}{4(2x+1)}$$

eq. asintoto obliq. per f, per $x \to -\infty$ $(+\infty)$

<u>Risposta : (c).</u>

6. $$f(x)=\begin{cases}\beta x+\frac{4}{3}\alpha^2 & \text{se } x\le 0\\ \dfrac{(1+x)^{2\alpha}-1}{x} & \text{se } x>0.\end{cases}$$

Det. innanzitutto la condizione che deve soddisfare α e β affinchè $f(x)$ risulta continua in $x=0$. f è continua in $x=0$

$\iff \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

Quindi deve valere $\frac{4}{3}\alpha^2=2\alpha$ (ricordo $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{2\alpha}-1}{x}=2\alpha$)

L'unica soluzione positiva di quest'eq. è $\underline{\underline{\alpha=3/2}}$.

Per tale α si ha $$f(x)=\begin{cases}\beta x+3 & \text{se } x\le 0\\ \dfrac{(1+x)^3-1}{x} & \text{se } x>0,\end{cases}$$

$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$ e quindi

$$f(x)=\begin{cases}\beta x+3 & \text{se } x\le 0\\ 3+3x+x^2 & \text{se } x>0.\end{cases}$$

Notiamo che $$f'(x)=\begin{cases}\beta & \text{se } x<0\\ 3+2x & \text{se } x>0.\end{cases}$$

Poichè $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\beta$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x)=3$, dal coroll. di Lagrange segue che $f'_-(0)=\beta$ e $f'_+(0)=3$. Risulta che f è derivabile in $x=0$ $\iff$ $\underline{\underline{\beta=3}}$.

Risulta $\alpha\beta=\frac{9}{2}$. $\square$

<u>Risposta: (a)</u>.

7. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^\alpha}$

Se $\alpha<0$, $\frac{\operatorname{arctg} n}{n^\alpha}=\underbrace{n^{-\alpha}}_{\to+\infty}\overbrace{\operatorname{arctg} n}^{\to\pi/2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$

Se $\alpha=0$, $\frac{\operatorname{arctg} n}{n^\alpha}=\operatorname{arctg} n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\pi/2$

Se $\alpha>0$, $0<\frac{\operatorname{arctg} n}{n^\alpha}<\frac{\pi/2}{n^\alpha}$.

$\searrow 0$ $\quad 0 \swarrow$ $n\to+\infty$

<u>Risposta: (b)</u>. $\square$

8. $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n \log\left(\cos\frac{1}{2^n}\right)$

$$\alpha^n \log\Big(\underbrace{\cos\frac{1}{2^n}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}\Big) = \alpha^n \log\Big(1+\overbrace{\left(\cos\frac{1}{2^n}-1\right)}^{\xrightarrow{n\to+\infty} 0}\Big)$$

Anche qui si possono usare gli sviluppi di Taylor ed essere più "spediti", ma svolgo l'esercizio sfruttando solo i limiti notevoli e il teorema del limite di funzioni composte

$$= \alpha^n \left(\cos\frac{1}{2^n}-1\right) \frac{\log\left(1+\left(\cos\frac{1}{2^n}-1\right)\right)}{\left(\cos\frac{1}{2^n}-1\right)}$$

$$= \alpha^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot \underbrace{\frac{\left(\cos\frac{1}{2^n}-1\right)}{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} -\frac{1}{2}} \cdot \overbrace{\frac{\log\left(1+\left(\cos\frac{1}{2^n}-1\right)\right)}{\left(\cos\frac{1}{2^n}-1\right)}}^{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}$$

finito e $\neq 0$

$\iff \frac{\alpha^n}{4^n}$ ammette limite finito e $\neq 0$

$\iff \alpha = 4$ $\square$

<u>Risposta: (c).</u>

9. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{\log(1+e^n)}$

$$\left(\frac{n}{n-2}\right)^{\log(1+e^n)} = \left(\frac{n-2+2}{n-2}\right)^{\log\left(e^n\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right)}$$

$$= \left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{\left[\log e^n + \log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right]}$$

$$= e^{\left[n+\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)\right]\log\left(1+\frac{2}{n-2}\right)}$$

$$= e^{\underbrace{\frac{2}{n-2}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 2}\left[n+\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}_{\to 0}\right]\overbrace{\frac{\log\left(1+\frac{2}{n-2}\right)}{\frac{2}{n-2}}}^{\xrightarrow{n\to+\infty} 1}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^2$$

$e^2 \in \,]3, 10]$

<u>Risposta: (c).</u> $\square$

10. $f(x) = \frac{x}{1-x}$

• $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ $\iff$

$$\frac{f(x)-x-x^2}{x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$\parallel$$

$$\frac{\frac{x}{1-x}-x-x^2}{x^2} = \frac{\cancel{x}-\cancel{x}+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+x^3}{x^2(1-x)} = \frac{x}{(1-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \checkmark$$

- $f(x)=o(x)$ per $x\to 0 \iff \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

  ma $\frac{f(x)}{x} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$!!

- $f(x) = x + o(x)$ per $x\to 0 \iff \frac{f(x)-x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

  $$\frac{f(x)-x}{x} = \frac{\frac{x}{1-x}-x}{x} = \frac{\cancel{x}-\cancel{x}+x^2}{x(1-x)} = \frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \checkmark$$

- $f(x) = -x + o(1) \iff f(x) = o(1)$ per $x\to 0$

  $\iff \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ✓ $\square$

<u>Risposta : (b).</u>

11. $2^{-x} = x^2 + 2x$ ha sol. in $[-4,4] \iff f(x) = 2^{-x} - x^2 - 2x$ ha uno zero in $[-4,4]$. Notiamo che

$f(-4) = 2^4 - 16 + 8 = 8 > 0 \qquad f(4) = \frac{1}{2^4} - 16 - 8 < 0$

Consid. f nel pt. medio di $[-4,4]$, ossia in 0.

Abbiamo $f(0) = 1 > 0$. Quindi lo zero di f cadrà nell'intervallo $[0,4]$. Prendiamo il pt. medio 2 e calcoliamo $f(2)$. Abbiamo $f(2) = \frac{1}{4} - 4 - 4 < 0$.

Dunque la soluzione dell'eq. data cade nell'intervallo $[0,2]$ quindi 1 è il numero che meglio approssima la soluzione tra quelle proposte. $\square$

<u>Risposta : (c).</u>

12. $f(x) = |x-1| \operatorname{arctg} x$

- f su $[0,1]$ è continua, derivabile su $]0,1[$ e $f(0) = f(1)$. Quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[0,1]$.
- f non soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[0,2]$ poiché non è derivabile in $x = 1$ (pt. angoloso!) e quindi

non è derivabile in $]0,2[$.

- La funzione f ammette massimo in $]0,1[$ poiché è continua, positiva e $f(0)=f(1)=0$.
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, essendo f continua su $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty = \inf_{\mathbb{R}} f$
  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \sup_{\mathbb{R}} f$ (segue dal teorema dei valori intermedi per funz. continue).

<u>Risposta : (b).</u> $\square$

13. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $|f(x)+x|\le 1$ in un intorno di $+\infty$; quindi

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\to 0} \le \frac{f(x)+x}{x} \le \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \quad \text{in un intorno di } +\infty \qquad x\to+\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+1\right)=0, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1.$$

<u>Risposta : (a).</u> $\square$

14. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile

1. f strett. negativa, allora $|f|$ deriv. Vera, perché essendo f strett. neg., $|f|=-f$ e quindi derivabile.
2. $f'(0)=0$, allora $|f|$ è derivabile in 0

$$\left|\frac{|f|(h)-|f|(0)}{h}\right| \le \left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \quad \forall h\neq 0$$

Poiché $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)=0 \Rightarrow \frac{|f|(h)-|f|(0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$\Rightarrow |f|$ è deriv. in 0 e vale $|f|'(0)=0$

3. f può essere una qualsiasi funzione positiva (per es.) in un intorno di 0, e quindi coincide con $|f|$, senza avere $f'(0)=0$. <u>Es.</u> $f(x)=x+1$; allora $|f(x)|=x+1$ su $]-1,+\infty[$ e $f'(0)=1$

<u>Risposta : (c).</u> $\square$

15. $(i-1)^{20}$ Scriviamo $-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Quindi $(i-1)^{20} = (\sqrt{2})^{20} e^{i\frac{3\pi}{4}\cdot 20} = 2^{10} e^{i15\pi} = \underline{\underline{-1024}}$ $\square$

Risposta: (d).

16. $(2i+3z)^2 = -9$ Poniamo $w = 2i+3z$. Allora l'eq. si scrive $w^2 = -9$, che ha come soluzioni $w_1 = -3i$ e $w_2 = 3i$ e dunque $z_1 = \frac{-3i-2i}{3} = -\frac{5}{3}i$, $z_2 = \frac{3i-2i}{3} = \frac{i}{3}$.

Quindi z_1 e z_2 sono puramente immaginari.

Non si trovano sull'asse reale; la loro distanza dall'origine è $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{3}$, rispettiv.; il loro argomento è $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ rispettiv. $\square$

Risposta: (a).

17. $f(x) = \log(1+x^2) - 2a \operatorname{arctg} x$

Oss. che f è derivabile due volte e $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2a}{1+x^2}$

$= \frac{2(x-a)}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x)$: $- -$ a $+ +$; $\searrow$ $\nearrow$ f

$x = a$ pt. critico

$f \searrow$ su $]-\infty, a]$

$\nearrow$ su $[a, +\infty[$

$f''(x) = 2\,\frac{(1+x^2)-(x-a)2x}{(1+x^2)^2} = 2 \cdot \frac{-x^2+2ax+1}{(1+x^2)^2}$

$f''(x) = 0 \iff x_{1/2} = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2+4}}{-2} = a \pm \sqrt{a^2+1}$

$f''(x)$: $-$ $a-\sqrt{a^2+1}$ $+ + +$ $a+\sqrt{a^2+1}$ $-$; $\cap$ $\cup$ $\cap$ f

Risulta che f è convessa in $[a-\sqrt{a^2+1}, a+\sqrt{a^2+1}]$.

Inoltre $f(x) = x^2 + o(x^2) - 2a(x + o(x))$ per $x \to 0$

$= -2ax + o(x)$ per $x \to 0$

Quindi f è un infinitesimo di ordine 1, rispetto all'infinitesimo campione x, per $x \to 0$.

Risposta: (d). $\square$

18. $A = \left\{ (-1)^n \arcsin\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}$. Oss. che $\frac{1}{n} \searrow$ e $\arcsin x \nearrow$

$\Rightarrow \arcsin\frac{1}{n} \searrow$

Oss. che $(-1)^{2k} \arcsin \frac{1}{2k} = \arcsin \frac{1}{2k} \searrow 0$ $\quad$ $\sup A = \arcsin \frac{1}{2} = \pi/6$

n pari

n dispari $\quad (-1)^{2k-1} \arcsin \frac{1}{2k-1} = -\arcsin \frac{1}{2k-1} \nearrow 0$ $\quad$ $\inf A = -\arcsin 1 = -\pi/2$.

L'unico pt. di accum. è 0, <u>che non appartiene ad A</u>.

L'insieme A è costituito solo da pt. isolati.

<u>Risposta: (c).</u> $\square$

19. $f(x) = e^{1-x} - \pi x - 1$ $\quad$ Oss. che f è strett. decrescente (quindi iniettiva) continua e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Notiamo che $f(1) = -\pi \iff f^{-1}(-\pi) = 1$. Abbiamo $g(-\pi) = 1$

$g'(-\pi) = (f^{-1})'(-\pi) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{-1-\pi} = a$ $\qquad f'(x) = -e^{1-x} - \pi \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi $y = -\frac{1}{1+\pi} x + b$. Richiedendo che il pt. $(-\pi, 1)$ appartenga alla retta tg si ha $1 = \frac{\pi}{1+\pi} + b$, ossia $b = \frac{1}{1+\pi}$

Si ha allora $a < 0$, $b > 0$.

<u>Risposta: (b).</u> $\square$

20. $f(x) = x^2 e^x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $= 0 \iff x = 0$; quindi $x = 0$ pt. di minimo assoluto per f su $\mathbb{R}$;

$g(x) = \log(1+x^2) + |x| - 1$: abbiamo $\log(1+x^2) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $= 0 \iff x = 0$

inoltre $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $= 0 \iff x = 0$

quindi anche g ha un pt. di minimo assoluto in 0;

$h(x) = 2 + x \operatorname{arctg} x^3$: $x \operatorname{arctg} x^3$ è una funzione pari; oss. che vale 0 in 0 ed è strett. positivo per $x > 0$; si ha nuovamente che 0 è un pt di minimo assoluto per $h(x)$.

<u>Risposta: (d).</u> $\blacksquare$