Università degli Studi di Trento – Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica
QUARTA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA A
a.a. 2020/21 – Trento, 10 giugno 2021

1) Sia $f(x,y)=\sqrt{3}(x-y)$ funzione continua su $\mathbb{R}^2$. Oss. che $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-xy+y^2-1=0\}$ è un insieme compatto (vedi Es. Paradigma 14.3). Gli estremi assoluti esistono dunque per il teorema di Weierstrass. Poniamo $g(x,y)=x^2-xy+y^2-1$

- Oss. che $\nabla g(x,y)=(2x-y,-x+2y)=\underline{0} \iff (x,y)=(0,0)$.
  Poiché $(0,0)\notin\mathcal{C}$, possiamo asserire che tutti i pt. di $\mathcal{C}$ sono punti regolari.
- Possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange alla determinazione dei pt. stazionari di $f(x,y)=\sqrt{3}(x-y)$ su $\mathcal{C}$. Richiediamo direttamente che

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix} \overset{(*)}{=} 0. \quad \text{Oss. che} \quad \det\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 2x-y\\ -\sqrt{3} & -x+2y\end{pmatrix}=0$$

(*) esprime la dipendenza lineare fra i due vettori ∇f e ∇g

$$\iff -x+2y+2x-y=0$$
$$\iff x+y=0 \iff y=-x.$$

Dall'eq. del vincolo $x^2-xy+y^2-1=0$ si ottiene allora $3x^2=1$ ossia $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. I pt. stazionari di f su $\mathcal{C}$ sono dunque

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad e \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Poiché $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-2$ e

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2,$$

possiamo concludere che $\underline{\min_{\mathcal{C}} f=-2}$ e $\underline{\max_{\mathcal{C}} f=2}$.

2) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(x,y) = \alpha x^2 - y^2 + 2\alpha^3 xy$.

Risulta $\nabla f(x,y) = (2\alpha x + 2\alpha^3 y, -2y + 2\alpha^3 x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Allora $\nabla f(-1,1) = (0,0) \iff \begin{cases} -\alpha + \alpha^3 = 0 \\ -1 - \alpha^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(-1+\alpha^2) = 0 \\ \alpha^3 = -1 \end{cases}$.

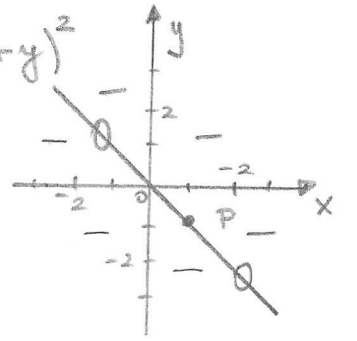
Quindi l'unica soluzione di questo sistema è $\underline{\underline{\alpha = -1}}$.

Abbiamo allora

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 - 2xy = -(x+y)^2$$

Oss. che $f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) : y = -x$

mentre è < 0 altrimenti.



segno di f

Allora, guardando semplicemente il segno di f

- P è un pt. di massimo locale per f (V)
- P è un pt. di minimo locale per f (F)
- P è un pt. di massimo assoluto per f (V)
- P è un pt. di minimo assoluto per f (F)
- P è un pt. di sella per f (F).

Oss. che $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ per cui in particolare $\det H_f(-1,1) = 0$;

lo studio della matrice hessiana non ci avrebbe permesso di rispondere alle domande sopra.

■

3) $\underline{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \underline{r}(t) = (t^2 + t + 1, t\sin|t|, 2t+1)$

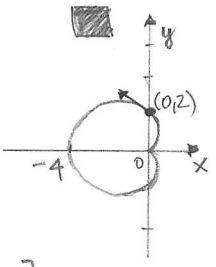
Oss. che $\underline{r}(0) = (1,0,1)$; inoltre $r_2(t) \doteq t\sin|t|$ è derivabile in $t=0$ e $r_2'(0) = 0$.

Risulta $\underline{r}'(0) = (1, 0, 2)$. Allora l'eq. parametrica della retta tangente alla curva nel pt. $(1,0,1)$ risulta

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 0 + 0 \cdot s \\ z = 1 + 2 \cdot s \end{cases}, \text{ ossia } \begin{cases} x = 1+s \\ y = 0 \\ z = 1+2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Risulta allora

$$\underline{\underline{a = b = 0}}\,, \qquad \underline{\underline{c = 1}}\,, \qquad \underline{\underline{d = 2.}}$$



4) $\rho : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ $\quad \rho(\vartheta) = 2(1-\cos\vartheta)$; osserviamo che una rappresentazione parametrica di tale curva polare è

$$\underline{r}(\vartheta) = \big(2(1-\cos\vartheta)\cos\vartheta,\ 2(1-\cos\vartheta)\sin\vartheta\big) \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Risulta $\underline{r}(\frac{\pi}{2}) = (0,2)$; inoltre

$$\underline{r}'(\vartheta) = \big(-2\sin\vartheta + 4\cos\vartheta\sin\vartheta,\ 2\cos\vartheta + 2\sin^2\vartheta - 2\cos^2\vartheta\big),$$

per cui $\underline{r}'(\frac{\pi}{2}) = (-2, 2)$. Il vettore tangente alla curva in $(0,2)$ è dunque $\underline{\underline{(-2,2).}}$

5) $\mathscr{C}$: $\quad y^2 - 2y + 1 - x^2 + x^4 = 0$

$P = \left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \in \mathscr{C}$: infatti $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} =$

$$= \cancel{1} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{16} - \cancel{2} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{4}{16} - \frac{1}{4} = 0.$$

Poniamo $g(x,y) = y^2 - 2y + 1 - x^2 + x^4$. L'eq. della retta tg a $\mathscr{C}$ in P si scrive

$$\frac{\partial g}{\partial x}(P)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\partial g}{\partial y}(P)\left(y - 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0.$$

Ora $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2x + 4x^3$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$= -1 + \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}} = -\frac{1}{2}.$$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y - 2$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) - 2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi

$$-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0,$$

ossia

$$-x + \frac{1}{2} + \sqrt{3}y - \sqrt{3} - \frac{3}{4} = 0$$

$$-4x + 4\sqrt{3}y - 4\sqrt{3} - 1 = 0.$$

Quindi

$$ax + b\sqrt{3}y + c\sqrt{3} - 1 = 0$$

è l'eq. della retta tangente a $\mathcal{C}$ in P $\Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{a=-4}} \qquad \underline{\underline{b=4}} \qquad \underline{\underline{c=-4.}}$$

$\square$

Il vettore ortogonale a $\mathcal{C}$ nel pt. P è dato da $\nabla g(P)$; poiché $\nabla g(P) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, il vettore $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ è ortogonale a $\mathcal{C}$ in P.

V

Notiamo infine che da $\nabla g(x,y) = (-2x+4x^3, 2y-2)$ segue $\nabla g(0,1) = (0,0)$. Possiamo concludere che $(0,1)$ è un punto singolare per $\mathcal{C}$.

V

$\blacksquare$

6) Abbiamo $x^2 - 2y + 6\sin(x+y^2)$.

Ricordiamo che $\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + o(t^4)$ per $t \to 0$.

Poiché $x+y^2 \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x^2 - 2y + 6\sin(x+y^2) &= x^2 - 2y + 6\left((x+y^2) - \frac{1}{6}(x+y^2)^3 + o((x+y^2)^4)\right) \\ &= x^2 - 2y + 6x + 6y^2 - (x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6) \\ &\qquad + 6o((x+y^2)^4) \\ &= x^2 - 2y + 6x + 6y^2 - x^3 - 3x^2y^2 \\ &\qquad - 3xy^4 - y^6 + o((x+y^2)^4). \end{aligned}$$

Ora possiamo osservare che

$$\begin{aligned} -3xy^4 &= o((x^2+y^2)^2) && \text{per } (x,y) \to (0,0) \\ y^6 &= o((x^2+y^2)^2) && \text{"} \\ o((x+y^2)^4) &= o((x^2+y^2)^2) && \text{"} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} x^2 - 2y + 6\sin(x+y^2) = x^2 - 2y + 6x + 6y^2 - x^3 - 3x^2y^2 \\ + o(\|\underline{x}\|^4) \quad \text{per } (x,y) \to (0,0). \end{aligned}$$

Dall' unicità del polinomio di Taylor segue che il polinomio ricercato è

$$x^2 - 2y + 6x + 6y^2 - x^3 - 3x^2y^2.$$

Esso coincide con il polinomio

$$x^2 - 2y + 6x + 6y^2 + ax^3 + bx^4 + cx^3y + dx^2y^2 + exy^3 + fy^4$$

$\Longleftrightarrow$

$$\underline{\underline{a = -1}}, \quad \underline{\underline{b = c = 0}}, \quad \underline{\underline{d = -3}}, \quad \underline{\underline{e = f = 0.}}$$

7) Sia $f(x,y) = x(\log^2 y + x^2)$; f è definita su $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

Abbiamo
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \log^2 y + 3x^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{y}\log y.$$

Risulta $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \log^2 y + 3x^2 = 0 \\ \frac{2x}{y}\log y = 0. \end{cases}$

La seconda eq. ha soluzione $x = 0$ oppure $y = 1$.

se $x = 0$ dalla 1^a eq. risulta $y = 1$;

se $y = 1$ dalla 1^a eq. risulta $x = 0$.

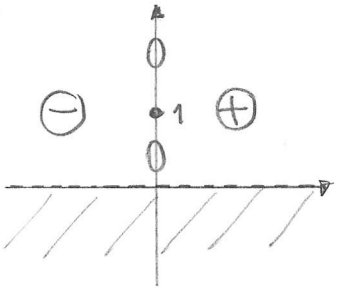
Quindi $\underline{\underline{P = (0,1) \text{ è l'unico pt. critico di } f.}}$

Notiamo
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{2}{y}\log y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x\left(\frac{\frac{1}{y}\cdot y - \log y}{y^2}\right) = 2x\left(\frac{1 - \log y}{y^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0,$$

da cui
$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi lo studio della matrice hessiana non ci permette di concludere nulla riguardo la natura del punto critico $(0,1)$.

Oss. però



segno di f

che dallo studio del segno di f possiamo immediatamente dedurre che <u>(0,1) è un pt. di sella per f.</u>

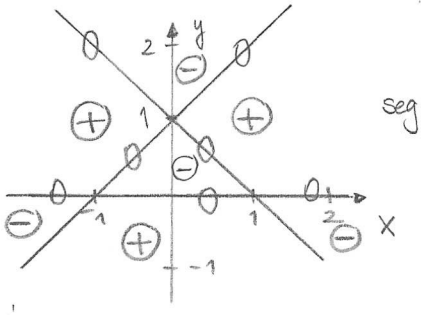
Poiché $\nabla f(0,1) = (0,0)$ e $f(0,1) = 0$ si ha subito che l'eq. del piano tangente al grafico di f in P è $z = 0$; quindi

$$z = ax + by + c$$

è l'eq. del piano tangente al grafico di f in P $\Leftrightarrow$

$$\underline{\underline{a = b = c = 0.}}$$

8) $f(x,y) = y\left(x^2 - (y-1)^2\right)$



segno di f

$$x^2 - (y-1)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad y - 1 = \pm|x|$$
$$y = 1 \pm |x|$$

f è una funzione continua su un insieme compatto; quindi f ammette massimo e minimo su T.

Poiché $f|_{\partial T} = 0$ e $f < 0$ in $\mathring{T}$ possiamo dedurre subito che

$$\underline{\underline{\max_T f = 0.}}$$

Per individuare il punto di minimo e il valore minimo di f su T cerchiamo i pt. critici di f su $\mathbb{R}^2$.

Oss. che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - (y-1)^2 - y \cdot 2(y-1)$$
$$= x^2 - 3y^2 + 4y - 1.$$

Allora $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - 3y^2 + 4y - 1 = 0 \end{cases}$

Se $x=0$ otteniamo $3y^2-4y+1=0$

$$y_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}\begin{cases}1\\ 1/3.\end{cases}$$

Se $y=0$ la seconda eq. del sistema si riduce a $x^2=1$, ossia $x=\pm 1$

Risulta quindi che i pt. critici per f in $\mathbb{R}^2$ sono

$$(\pm 1,0)\ ,\quad (0,1),\quad (0,\tfrac{1}{3}).$$

Notiamo che $(0,\frac{1}{3})\in \mathring{T}$, che è chiaramente il pt. di minimo che cercavamo e

$$\underline{\underline{3^3 \min_T f}} = 3^3 f(0,\tfrac{1}{3}) = 3^3\cdot\tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{4}{3^2}\right) = \underline{\underline{-4.}}$$

Ovviamente possiamo subito anche asserire che <u>f ha un minimo locale stretto in $(0,\frac{1}{3})$</u> : (V).

I pt. $(-1,0)$ e $(1,0)$ sono gli unici pt. critici di f (falso!) e sono entrambi pt. di sella (questo è vero). Quindi l'affermazione risulta (F)

La funzione f si annulla in tutti i suoi pt. critici : (F) (infatti in $(0,\frac{1}{3})$ vale $-\frac{4}{27}$). ■

9) Sia $\underline{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\quad \underline{f}(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1}{4},\ \frac{x_2^3-x_1+x_2}{4}\right)$

Oss. che $\underline{f}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$, poiché ogni componente di $\underline{f}$ è $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Oss. che

$$J_{\underline{f}}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{3x_2^2+1}{4}\end{pmatrix};$$

risulta che $\det J_{\underline{f}}(x_1,x_2)=\frac{1}{16}(3x_2^2+1)\neq 0\ \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Risulta che <u>$\underline{f}$ è un diffeomorfismo locale in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.</u>

Notiamo che $\underline{f}(0,1)=(0,\frac{1}{2})$. Risulta

$$J_{\underline{f}^{-1}}(0,\tfrac{1}{2}) = \left[J_{\underline{f}}(0,1)\right]^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

ossia

$$J_{f^{-1}}(0,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

quindi $\underline{\underline{a=4}}$, $\underline{\underline{b=0}}$, $\underline{\underline{c=d=1.}}$

10) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (xy, y^2x)$ $\quad g(s,t) = (2s+t, t^2-2s)$.

Abbiamo $J_{f\circ g}(s,t) = J_f(g(s,t)) \cdot J_g(s,t)$, $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Oss. che $g(1,1) = (3,-1)$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y^2 & 2yx \end{pmatrix} \qquad J_f(g(1,1)) = J_f(3,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$J_g(s,t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2t \end{pmatrix} \qquad J_g(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$J_{f\circ g}(1,1) = J_f(g(1,1))\, J_g(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 14 & -11 \end{pmatrix}$$

da cui $\underline{\underline{\det J_{f\circ g}(1,1)}} = \det \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 14 & -11 \end{pmatrix}$

$$= 88 - 70 = \underline{\underline{18.}}$$

11) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(t) = (t+t^2, -t)$ $\quad g(x,y) = x^2 + 3xy$.

Possiamo procedere come nell'es. precedente, ma anche scrivere

$$(g\circ f)(t) = g(f(t)) = g(t+t^2, -t) = (t+t^2)^2 - 3t(t+t^2)$$
$$= t^2 + 2t^3 + t^4 - 3t^2 - 3t^3 = t^4 - t^3 - 2t^2$$
$$\forall t \in \mathbb{R}$$

Dunque

$$(g\circ f)'(t) = 4t^3 - 3t^2 - 4t \qquad \forall t\in\mathbb{R},$$

per cui

$$\underline{\underline{(g\circ f)'(1)}} = \cancel{4} - 3 - \cancel{4} = \underline{\underline{-3}}.$$

■

12) $\underline{f}(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (x^3+3xy,\ x+y)$

- Abbiamo $\quad \operatorname{div}\underline{f}(x,y) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$

Dunque

$$\operatorname{div}\underline{f}(x,y) = 3x^2 + 3y + 1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

e quindi

$$\underline{\underline{\operatorname{div}\underline{f}(1,1)}} = 3+3+1 = \underline{\underline{7}}.$$

□

- Abbiamo $\quad \Delta f_1(x,y) = \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Poiché $\quad \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 3x^2+3y \qquad \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) = 6x$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 3x \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$

si ha

$$\Delta f_1(x,y) = 6x \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

e quindi

$$\underline{\underline{\Delta f_1(1,1) = 6}}.$$

□

- $f_2(x,y) = x+y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$; quindi f_2 è differenziabile e vale la formula

$$D_{\underline{v}} f_2(1,1) = \langle \nabla f_2(1,1), \underline{v}\rangle \qquad \forall \underline{v}\in\mathbb{R}^2, \|\underline{v}\|=1.$$

Ora $\nabla f_2(1,1) = (1,1)$; per $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ segue

$$\underline{\underline{\sqrt{5}\, D_{\underline{v}} f_2(1,1)}} = \sqrt{5}\,\left\langle \nabla f_2(1,1), \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}\right\rangle = \underline{\underline{3}}.$$

■

13) Sia $g(x,y) = e^{x-y} - x^2 + y^2 - e(x+1) - 1$.

Oss. che $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Vorremmo applicare il teorema della funzione implicita relativamente al pt. $(0,-1)$. Abbiamo

$$g(0,-1) = e + 1 - e - 1 = 0$$

$$g_y(x,y) = -e^{x-y} + 2y \quad , \quad \text{quindi} \quad g_y(0,-1) = -e-2 \neq 0.$$

Allora l'eq. $g(x,y)=0$ definisce univocamente, in un intorno del pt. $(0,-1)$ la funzione implicita $y=\varphi(x)$: si ha

$$\varphi(0) = -1$$

$$g(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U, \text{ intorno di } x_0 = 0.$$

Vale anche la formula

$$(*) \qquad \varphi'(x) = -\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))} \quad \forall x \in U;$$

in particolare

$$\varphi'(0) = -\frac{g_x(0,-1)}{g_y(0,-1)} = +\frac{e-e}{e+2} = 0,$$

poiché $g_x(x,y) = e^{x-y} - 2x - e \quad \forall (x,y)$. Quindi $x_0 = 0$ è un pt. critico per φ. Per determinare la natura di tale pt. critico calcoliamo $\varphi''(0)$. Questo lo possiamo fare, per es., usando $(*)$.

Poiché

$$\varphi'(x) = -\frac{e^{x-\varphi(x)} - 2x - e}{-e^{x-\varphi(x)} + 2\varphi(x)} \quad \forall x \in U,$$

si ha $\forall x \in U$

$$\varphi''(x) = -\frac{\left(e^{x-\varphi(x)}(1-\varphi'(x)) - 2\right)\left(-e^{x-\varphi(x)} + 2\varphi(x)\right) - \left(e^{x-\varphi(x)} - 2x - e\right)\left(-e^{x-\varphi(x)}(1-\varphi'(x)) + 2\varphi'(x)\right)}{\left[-e^{x-\varphi(x)} + 2\varphi(x)\right]^2}.$$

Poiché $\varphi(0) = -1$ e $\varphi'(0) = 0$ ne segue

$$\varphi''(0) = -\frac{(e-2)(-e-2) - \cancel{(e-e)(\dots)}}{[-e-2]^2} = \frac{e-2}{e+2} > 0.$$

Possiamo allora subito dire che la funzione φ ha un minimo locale stretto in x_0 (V).

Risulta $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

ossia

$$\varphi(x) = -1 + \frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)+1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\varphi''(0)x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{e-2}{e+2}. \quad \text{(V)}$$

Oss. che $g(0,-1) = 0$, ma $g_x(0,-1) = 0$. Quindi l'eq. $g(x,y) = 0$ non definisce implicitamente una funzione $x = \psi(y)$ di classe C^∞ in un intorno di $y_0 = -1$ tale che $\psi(-1) = 0$. (F).

14) $$f(x,y) = \begin{cases} \sin(|x| + y^2)\log(x^2+y^2) & \text{su } \overline{B}_{1/2}(0,0)\setminus\{(0,0)\} \\ 0 & \text{in } (0,0). \end{cases}$$

$\forall t \neq 0$

- $$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{\sin(|t|)\log t^2}{t} = 2\,\frac{\sin(|t|)\log|t|}{t}$$

Allora per $t > 0$ $\quad 2\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\xrightarrow{t\to 0^+} 1}\log|t| \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$

per $t < 0$ $\quad -2\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{\xrightarrow{t\to 0^-} 1}\log|t| \xrightarrow[t\to 0^-]{} +\infty$.

$\Rightarrow \nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Quindi la risposta corretta è (F).

$\forall t \neq 0$

- $$\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{\sin t^2 \log t^2}{t} = 2\underbrace{\frac{\sin t^2}{t^2}}_{\xrightarrow{t\to 0^+} 1}\cdot \underbrace{t\log|t|}_{\xrightarrow{t\to 0} 0}$$

$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e vale 0. Quindi la risposta corretta è (V).

- f è differenziabile in $(0,0)$ (F).

  Se fosse differenziabile in $(0,0)$, f risulterebbe derivabile in $(0,0)$.

- f è continua in $(0,0)$. (V)

  Infatti $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(|x|+y^2)\log(x^2+y^2) = 0 = f(0,0)$.

  Possiamo osservare che

$$0 \le |f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)| = \underbrace{\left|\frac{\sin(\rho|\cos\vartheta| + \rho^2\sin^2\vartheta)}{\rho|\cos\vartheta| + \rho^2\sin^2\vartheta}\right|}_{\xrightarrow[1]{\rho\to 0^+}} \cdot \left|\rho\,\underbrace{(|\cos\vartheta| + \rho\sin^2\vartheta)}_{\le 2 \text{ per } \rho\le 1}\, 2\log\rho\right|$$

  Ora basta notare che $\lim_{\rho\to 0^+} \rho\log\rho = 0$, e possiamo concludere grazie al teorema del confronto. $\square$

- f è continua su $\overline{B}_{1/2}(0,0)$: quindi per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. ■

15) $f(x,y) = (x^2+y^2-2)(e^{1-x}-y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

- Abbiamo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(e^{1-x}-y) - (x^2+y^2-2)e^{1-x}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(e^{1-x}-y) - (x^2+y^2-2).$$

  Notiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2(1-1) - (2-2) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2(1-1) - (2-2) = 0.$$

  Quindi $(1,1)$ è un pt. critico per f. (V)

- Oss. che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(e^{1-x}-y) - 2xe^{1-x} - 2xe^{1-x} + (x^2+y^2-2)e^{1-x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2\cdot 0 - 2 - 2 + 0 = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = -2x - 2ye^{1-x}$$

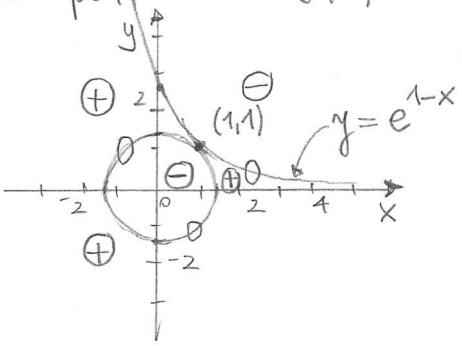
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1) = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2e^{1-x} - 4y - 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = \cancel{2} - 4 - \cancel{2} = -4.$$

Quindi abbiamo
$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix};$$

non possiamo concludere dallo studio della matrice hessiana la natura del pt. critico $(1,1)$. Possiamo però rappresentare il segno di f:

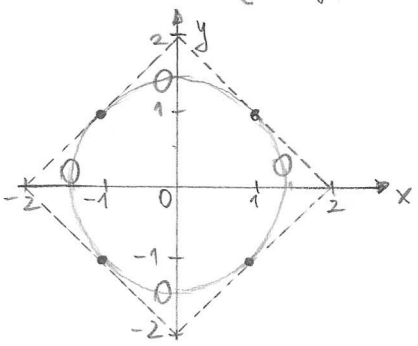


Le curve ottenute uguagliando a zero ciascuno dei due fattori sono

$$x^2+y^2-2=0 \qquad\qquad y = e^{1-x}$$

Si tratta di curve tangenti nel pt. $(1,1)$ (risulta infatti $\frac{d}{dx}(e^{1-x})\Big|_{x=1} = -1$). Dalla distribuzione dei segni possiamo concludere che $(1,1)$ è un pt. di sella per f. (V)

Oss. che $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| < 2\} \supset B_{\sqrt{2}}(\underline{0})$



Oss. che $B_{\sqrt{2}}(\underline{0}) \subset Q$

f è continua su $\overline{B}_{\sqrt{2}}(\underline{0})$; assume per il teorema di Weierstrass massimo e minimo in $\overline{B}_{\sqrt{2}}(\underline{0})$. Poiché $f|_{\partial B_{\sqrt{2}}(\underline{0})} = 0$, e $f < 0$ su $B_{\sqrt{2}}(\underline{0})$, f assume il minimo in $B_{\sqrt{2}}(\underline{0})$. Essendo f $\mathcal{C}^1$, tale minimo viene assunto in un pt. critico di f; poiché $B_{\sqrt{2}}(\underline{0}) \subset Q$, tale pt. critico $\in Q$. La risposta corretta è quindi (V). $\square$

La funzione f è nulla nei pt. $(\pm 1, \pm 1)$ e $(\pm 1, \mp 1)$ su ∂Q, mentre è positiva altrimenti. Il numero di punti di minimo assoluto di f su ∂Q è $\underline{\underline{4}}$. $\blacksquare$