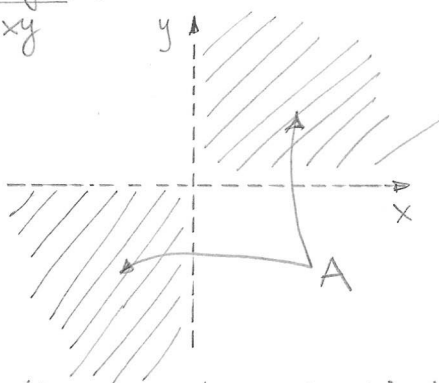


(A)

1. Vedi A3_27-06-Fis, Es. 1
2. " , Es. 3
3. " , Es. 4
4. " , Es. 6
5. " , Es. 9
12. " , Es. 11.

6. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2xy}}$. Abbiamo che $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$
 $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < 0\}.$



(a) $(0,0)$ pt. di accumulazione di A ? (Sì) :

Per ogni intorno $B_r(0)$ si ha $B_r(0) \cap A \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset$.

(b) Basta prendere $(x,y) = (\frac{\sqrt{r}}{2}, \frac{\sqrt{r}}{2}) \in A$ e $(x,y) \in B_r(0) \cap A$.

(b) $\partial A \subset A$? (No) :

Infatti $\partial A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$

(c) $\bar{A}$ è compatto? (No) :

Infatti $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\}$

che non è un insieme limitato.

(d) f è estendibile con continuità in $(0,0)$ (Falsa) :

$\nexists \lim_{\substack{(x,y) \in A \\ (x,y) \rightarrow (0,0)}} f(x,y)$: infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f|_{y=x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2}} = 0,$

ma $\lim_{x \rightarrow 0^+} f|_{y=x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x^6}{\sqrt{2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(e) Esiste $\lim_{\substack{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y)$ Vero :

Infatti, $\forall (x,y) \in A$ $0 < \sqrt{2xy} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2xy}} \geq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = +\infty.$$



7. $f(x,y) = e^{xy}$, $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$.

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, E chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass

sono massimo e minimo di f su E .

Consideriamo dapprima gli eventuali pt. critici interni all'insieme E :

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy}) = (0,0).$$

Si ottiene solamente l'origine. Ai fini della determinazione dei pt. di estremo assoluto di f su E non sarebbe necessario indagare se tale pt. critico è effettivamente di estremo (si confronta poi il valore che in esso assume f con il valore assunto nei pt. stazionari individuati sul bordo di E), ma è necessario per rispondere alla domanda successiva nell'es. e quindi lo facciamo qui di seguito; determiniamo la matrice hessiana di $f(x,y)$. Abbiamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^2 e^{xy} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^{xy} + xy e^{xy} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(0,0) < 0.$$

L'origine risulta quindi un pt. di sella, e quindi non pt. critici di f in E che sono pt. di estremo locale per f .

Applichiamo ora il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione dei pt. stazionari di f su ∂E . Dobbiamo trovare gli (x,y) : $4x^2 + y^2 = 1$ e $\det \begin{pmatrix} ye^{xy} & 8x \\ xe^{xy} & 2y \end{pmatrix} = 0$.

Dobbiamo allora risolvere il sistema
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 - 4x^2 = 0, \end{cases}$$

ossia
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ |y| = 2|x|. \end{cases}$$

Se $y = 2x$, dalla prima eq. ricaviamo $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e quindi $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Se $y = -2x$, dalla prima eq. ricaviamo $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e quindi $y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Poichè

$$f\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}} \quad f\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{4}}$$

e $f(0,0) = 1$, possiamo concludere asserendo

$$\underline{\underline{\min_E f = e^{-\frac{1}{4}}}} \quad \underline{\underline{\max_E f = e^{\frac{1}{4}}.}}$$

8. Sia $g(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + 4x^2 - 4y^2$; allora

$$\mathcal{C}: g(x,y) = 0.$$

(a) Poichè $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $g(0,-2) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$,

$$g_y(x,y) = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y - 8y \quad \text{e quindi} \quad g_y(0,-2) = -16 \neq 0$$

dal teorema del Dini segue che in un intorno del pt. $(0,-2)$

la curva $\mathcal{C}$ è il grafico di un'opportuna funzione $y = \varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty(U)$, con U intorno di $x_0 = 0$: si ha $y_0 = \varphi(0) = -2$ e

$$(*) \quad g(x, \varphi(x)) = (x^2 + \varphi^2(x))^2 + 4x^2 - 4\varphi^2(x) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Derivando (*) rispetto a x mi ha

$$(**) \quad 2(x^2 + \varphi^2(x))(2x + 2\varphi(x)\varphi'(x)) + 8x - 8\varphi(x)\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in U$$

e in particolare, tenendo conto che $\varphi(0) = -2$, risulta $-16\varphi'(0) = 0$,
ossia $\varphi'(0) = 0$.

Derivando (**) rispetto a x mi ha

$$2(2x + 2\varphi(x)\varphi'(x))^2 + 2(x^2 + \varphi^2(x))(2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) + 8 - 8(\varphi'(x))^2 - 8\varphi(x)\varphi''(x) = 0 \quad \forall x \in U,$$

quindi, tenendo conto che $\varphi(0) = -2$ e $\varphi'(0) = 0$ si ottiene

$$8(2) - 4\varphi''(0) + 8 + 16\varphi''(0) = 0,$$

da cui $\varphi''(0) = \frac{3}{2}$. Allora il polinomio di Taylor di φ di ordine 2 è dato da $\varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 = -2 + \frac{3}{4}x^2$ ed è quindi dato da $a + bx + cx^2$, dove $a = -2$, $b = 0$ e $c = \frac{3}{4}$.

(b) In coordinate polari la curva $\mathcal{C}$ diventa

$$\rho^4 + 4\rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0,$$

$$\text{cioè } \rho^2[\rho^2 + 4\cos 2\theta] = 0. \quad \text{Quindi } \rho = 2\sqrt{-\cos 2\theta}.$$

Tenendo conto che $-\cos 2\theta \geq 0$, i valori θ da considerare

sono

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\theta \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

cioè

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

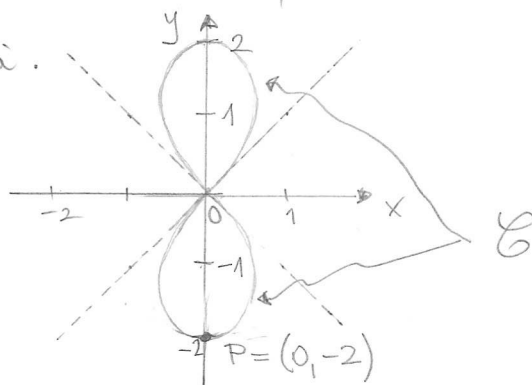
Otteniamo quindi i seguenti intervalli

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], \quad \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

Ne segue che la curva $\mathcal{C}$ si trova nei settori individuati, in coordinate polari, da questi intervalli angolari (che coprono gli intervalli ammissibili in un periodo 2π). Una rappresentazione qualitativa di $\mathcal{C}$ si ottiene quindi a partire dal grafico della funzione $\rho(\theta) = 2\sqrt{-\cos 2\theta}$

Oss. Possiamo ottenere anche $\varphi'(x)$, quindi $\varphi'(0)$ usando la formula $\varphi(x) = -\frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in U$. In particolare da $g_x(x, y) = 2(x^2 + y^2)2x + 8x$ segue $g_x(0, -2) = 0$, quindi $\varphi'(0) = 0$.

che dà, per ogni semiretta uscente dall'origine, la distanza dall'origine del punto che la curva interseca sulla semiretta stessa. Il valore $\rho(\theta)$ passa da 0 a 2, ritornando a 0, mentre θ percorre ciascuno degli intervalli.



9. Sia $d \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = dx^2 + \frac{y^3}{3} - 2x - \frac{y^2}{2}$.

Abbiamo allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2dx - 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2d - 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2 - y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0$.

Risulta $\nabla f(1, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow \underline{d = 1}$.

Consideriamo allora la funzione $f(x, y) = x^2 + \frac{y^3}{3} - 2x - \frac{y^2}{2}$

(a) $P = (1, 1)$ è pt. critico. Inoltre da $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2y - 1$

si ha quindi $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Perché $f_{xx}(1, 1) > 0$, $\det H_f(1, 1) = 2 > 0$, risulta quindi che P è un punto di minimo loc. stretto perf.

(b) Osserviamo che $\nabla f(x, y) = (2(x-1), y(y-1)) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow (x, y) = (1, 1)$ e $(x, y) = (1, 0)$. Quindi P non è l'unico pt. critico di f .

(c) Poiché $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, e quindi $\det H_f(1, 0) = -2 < 0$, risulta che $(1, 0)$ è un pt. di sella per f , e quindi P è l'unico pt. critico di f che è di estremo per f .

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x^3}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) f è continua in $(0,0)$ (V).

Infatti

$$0 \leq \left| \frac{1-e^{-x^3}}{x^2+y^2} \right| = \left| \underbrace{\frac{1-e^{-x^3}}{-x^3}}_{\substack{\downarrow \\ 1 \\ (x,y) \rightarrow (0,0)}} \right| \left| \underbrace{\frac{x^3}{x^2+y^2}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ (x,y) \rightarrow (0,0) \text{ e per questo}}} \right|$$

$$\text{basta oss. che } 0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |x| \leq |x| \xrightarrow{\text{per } (x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \quad \square$$

(b) f è derivabile in $(0,0)$ (V).

oss. che $\forall y \in \mathbb{R}, f(0,y) = 0$; quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Rimane da indagare se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$: abbiamo $\forall t \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(0+t\mathbf{e}_1) - f(0)}{t} &= \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \frac{\frac{1-e^{-t^3}}{t^2} - 0}{t} = \frac{1-e^{-t^3}}{t^3} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \end{aligned}$$

Quindi

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1}} \quad \square$$

(c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (F).

Abbiamo provato in (b) che $\nabla f(0,0) = (1,0)$. $\square$

(d) Per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^2, \|\underline{v}\|=1$ si ha $D_{\underline{v}} f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \underline{v} \rangle$. (F)

Oss. che $\forall t \neq 0, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ con $\|\underline{v}\|=1, \underline{v} \neq \mathbf{e}_i \ i=1,2$

$$\frac{f(0+t\underline{v}) - f(0)}{t} = \frac{1 - e^{t^3 \underline{v}_1^3}}{t^3} = \frac{1 - e^{t^3 \underline{v}_1^3}}{t^3 \underline{v}_1^3} \cdot \underline{v}_1^3 \xrightarrow{t \rightarrow 0} \underline{v}_1^3$$

$\downarrow$
per $t \rightarrow 0$
 $\downarrow$
 1

Quindi $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \|\underline{v}\|=1, \underline{v} \neq \mathbf{e}_1, D_{\underline{v}} f(0,0) = \underline{v}_1^3$, mentre $\langle \nabla f(0,0), \underline{v} \rangle = \underline{v}_1$ $\blacksquare$

11. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1,$$

Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio)

(a) La succ. $(a_n)_n$ è limitata. (No)

Basta prendere $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$ $\square$

(b) $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0 \ \forall n \geq \bar{n}$. (No)

Vedi es. in (a) oppure $a_n = (-1)^n \ n \in \mathbb{N}$. $\square$

(c) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n < 1$. (No)

Se $(a_n)_n$ ammette limite, allora $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Per es. $a_n \equiv 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

(d) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ se $(a_n)_n$ è convergente. (Sì).

Se $(a_n)_n$ è una succ. convergente, si ha $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. $\blacksquare$