A

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	3	3	2	2	3	3	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	3	3	3	5		36
Punti ottenuti							

1. (3 punti) (a) Determinate la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^{-x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Si ha $y(x) =$ ______________________.

(b) Tracciate qui a fianco un grafico qualitativo di $y(x)$ nell'intorno di 0.

2. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sqrt{|x|} & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ \arctan \dfrac{1}{x^2 - 1} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $f(\mathbb{R}) =$ ______.

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è continua su tutto $\mathbb{R}$. ○ Vera ○ Falsa

(b) f ammette massimo e minimo. ○ Vera ○ Falsa

(c) $f|_{[-1,1]}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. ○ Vera ○ Falsa

Perché? ______________________________

(d) Esiste $x_0 \in]0, 1[$ tale che $f'(x_0) = \frac{\pi}{2}$. ○ Vera ○ Falsa

Perché? ______________________________

3. (2 punti) Sia

$$A = \int_0^1 (x-1)^2 \arctan x dx.$$

Allora $A = \dfrac{1}{6}(a + b\pi + c\log 2)$, dove $a =$ ______, $b =$ ______ e $c =$ ______.

4. (2 punti) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o(b_n) \qquad n \to +\infty.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).

(a) $a_n^2 = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____________________

(b) $\sin a_n = o(b_n)$ per $n \to +\infty$. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____________________

(c) $\sin^2(\frac{a_n}{b_n}) = o(\frac{a_n}{b_n})$ per $n \to +\infty$. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____________________

(d) $(a_n)_n$ è limitata superiormente. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____________________

5. (3 punti) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\big(\log(1+|\alpha|)-1\big)^n}{n\log^{\frac{3}{2}} n}.$$

è convergente. Allora

(a) l'insieme $E_\alpha =$ ____________________.

(b) E_α è limitato. ◯ Vero ◯ Falso

(c) E_α è un intervallo. ◯ Vero ◯ Falso

6. (3 punti) Sia $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2xy}}$ e A il suo insieme di definizione. Rappresentate A qui a fianco.

(a) $(0,0)$ è un punto di accumulazione di A? ◯ Sì ◯ No

(b) $\partial A \subset A$? ◯ Sì ◯ No

(c) L'insieme $\overline{A}$ è compatto? ◯ Sì ◯ No

Per ciascuna delle seguenti affermazioni stabilite se è vera o se è falsa.

(d) f è estendibile con continuità in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____________________

(e) Esiste $\displaystyle\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to+\infty \\ (x,y)\in A}} f(x,y)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ____________________

7. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = e^{xy}$ e sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$. Allora

$$\min_E f = \_\_\_\_\_\_ \qquad \max_E f = \_\_\_\_\_\_.$$

Esistono punti critici di f in E che sono punti di estremo locale per f? ◯ Sì ◯ No

Perché? ____

8. (3 punti) Sia $\mathcal{C}$ la curva piana data dall'equazione

$$(x^2 + y^2)^2 + 4x^2 - 4y^2 = 0.$$

(a) Nell'intorno del punto $P = (0, -2)$ la curva $\mathcal{C}$ è grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Perché? ____

Il polinomio di Taylor di φ di ordine 2 centrato in 0 è dato da

$$a + bx + cx^2$$

dove $a = \_\_\_\_\_\_$, $b = \_\_\_\_\_\_$ e $c = \_\_\_\_\_\_$.

(b) Dopo aver scritto l'equazione della curva in coordinate polari, rappresentatela qui a fianco.

9. (3 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione

$$f(x,y) = \alpha x^2 + \frac{y^3}{3} - 2x - \frac{y^2}{2}$$

ha un punto critico in $P = (1,1)$ per $\alpha = \_\_\_\_\_\_$.

Per tale valore di α stabilite

(a) la natura di P. Esso è un punto di ____________________ per f.

Perché? ____

(b) se P è l'unico punto critico di f. ◯ Sì ◯ No

(c) se P è l'unico punto critico di f che è di estremo per f. ◯ Sì ◯ No

Perché? ____

10. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x^3}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è continua in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) f è derivabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(d) Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ si ha $D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \mathbf{v} \rangle$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perchè? ______________________________

11. (3 punti) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).

(a) La successione $(a_n)_n$ è limitata. ◯ Si ◯ No

Perchè? ______________________________

(b) Esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq \overline{n}$. ◯ Si ◯ No

Perchè? ______________________________

(c) $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n < 1$. ◯ Si ◯ No

Perchè? ______________________________

(d) $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ se $(a_n)_n$ è convergente. ◯ Si ◯ No

Perchè? ______________________________

Per il seguente esercizio è richiesto UN ACCURATO SVOLGIMENTO sui fogli a quadretti.

12. (5 punti) (a) Trovate le soluzioni $(\widehat{z}, \widehat{w}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del seguente sistema di equazioni

$$(*) \qquad \begin{cases} (\overline{z} + \mathbf{i})w^2 + (1 + 2\mathbf{i})w = 0 \\ w(w + \overline{z}) = -2\mathbf{i} - 3. \end{cases}$$

(b) Individuate l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : (z + \overline{z})(z^4 + 64) = 0\}$, e rappresentatelo nel piano di Gauss.

(c) Esiste una coppia $(\widehat{z}, \widehat{w})$ che sia soluzione di (*) e tale che $\widehat{z} \in E$ e $\widehat{w} \in E$?