

- (A) 1. Dobbiamo risolvere in $\mathbb{C}$ l'eq. $(2z-1)^3 = 1$. Se poniamo $w = 2z-1$, l'eq. proposta diventa $w^3 = 1$, cioè si tratta di trovare le tre radici cubiche di $1 = e^{i0}$, che sono
- $$w_0 = 1, \quad w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad (= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$
- $$w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad (= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}).$$

Risulta allora che le soluzioni di $(2z-1)^3 = 1$ sono

$$\underline{z_0} = \frac{w_0 + 1}{2} = \frac{1+1}{2} = \underline{1},$$

$$\underline{z_1} = \frac{w_1 + 1}{2} = \frac{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1}{2} = \underline{\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}},$$

$$\underline{z_2} = \frac{w_2 + 1}{2} = \frac{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1}{2} = \underline{\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

- (a) Vera : $z_1 = \overline{z_2}$.
- (b) Vera : basta prendere $z = z_0$.
- (c) Falsa : $|z_0| = 1 \neq \frac{1}{2}$.
- (d) Vera : $\operatorname{Re} z_0 = 1 > 0$, $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = \frac{1}{4} > 0$. ■

2. $L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log\left(\int_1^x e^{3t} \arctan t \, dt\right)$ $\left[\frac{0}{\infty}\right]$

$\downarrow$
 $\cos 0 = 1$

$\searrow$
 $> \frac{\pi}{4} e^{3t}$
 $\rightarrow +\infty$

Vogliamo determinare L_1 utilizzando il teorema di de l'Hôpital.

Poniamo su $]1, +\infty[$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log\left(\int_1^x e^{3t} \arctan t \, dt\right)}{x}.$$

Grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale (TFC) e il teorema di derivazione di funz. composte si ha che f è derivabile su $]1, +\infty[$

e

$$f'(x) = \frac{1}{\int_1^x e^{3t} \arctan t \, dt} \cdot e^{3x} \arctan x.$$

Inoltre g è derivabile su $]1, +\infty[$ e $g'(x) \neq 0$. Abbiamo allora

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\int_1^x e^{3t} \arctan t dt} \cdot e^{3x} \arctan x}{1} = \frac{e^{3x} \arctan x}{\int_1^x e^{3t} \arctan t dt}.$$

Oss. che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Per calcolare questo limite vogliamo nuovamente usare il teorema di de l'Hôpital; oss. velocemente che le ipotesi del teorema di de l'Hôpital sono verificate anche in questo caso e che abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{(e^{3x} \arctan x)'}{\left(\int_1^x e^{3t} \arctan t dt\right)'} &= \frac{3e^{3x} \arctan x + e^{3x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{e^{3x} \arctan x} = \\ &= \frac{\cancel{e^{3x} \arctan x} \left[3 + \frac{1}{(\arctan x)(1+x^2)} \right]}{\cancel{e^{3x} \arctan x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3. \end{aligned}$$

TFC

Allora, dal teorema di de l'Hôpital utilizzato una prima volta segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 3,$$

ed utilizzato una seconda volta mi ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$, ossia $\underline{\underline{L_1 = 3}}$. ■

3. Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x - \sin x)^{1/5}}{x^\alpha \sqrt{1+x^\alpha}} dx.$$

$f(x)$

$f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continua oss. che $x > \sin x \quad \forall x > 0$.

per $x \rightarrow 0^+$: $f(x) \sim \frac{\left(\frac{x^3}{6}\right)^{1/5}}{x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt[5]{6} x^{\alpha - 3/5}}$

per $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \sim \frac{x^{1/5}}{x^\alpha x^{\alpha/2}} = \frac{1}{x^{3\alpha/2 - 1/5}}.$

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha < 1$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \iff \alpha > 1$,
 per il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri segue
 che $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$ se e solo se $\begin{cases} \alpha - \frac{3}{5} < 1 \\ \frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{5} > 1 \end{cases}$.

Allora $E_\alpha =]\frac{4}{5}, \frac{8}{5}[$. Ne segue $\underline{\inf E_\alpha = \frac{4}{5}}$, $\underline{\sup E_\alpha = \frac{8}{5}}$. ■

4.b) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \log\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - 1 + e^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{n}} \right)$$

è convergente.

Poniamo $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \log\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - 1 + e^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{n}} \quad \forall n \geq 5$.

Notiamo che se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = -1$ si ha che

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \log\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \left(-\frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty, \\ &= -\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Segue allora immediatamente che la serie data diverge negativamente.

Altrimenti,

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6(\sqrt{n})^3} + o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3}\right) \right) \left(-\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{\frac{\alpha^2}{2}}{(\sqrt{n})^2} + o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^2}\right) \right) - 1 + \\ &\quad + 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{n} + \frac{\alpha^2(\alpha+1)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty \\ &= -\frac{2}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Allora $\sum_{n=5}^{+\infty} a_n$ è convergente se e solo se $-2 + \alpha(\alpha+1) = 0$,
 ossia $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$. Risulta $\underline{E_\alpha = \{-2, 1\}}$. □

(b) Vero : $\max E_\alpha = 1$, $\min E_\alpha = -2$. □

(c) Falso. ■

5. Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o(b_n) \quad n \rightarrow +\infty,$$

ossia $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) Se $(a_n)_n$ è infinitesima, allora anche $(b_n)_n$ lo è. (No):

Basta prendere $a_0 = 1$, $a_n = \frac{1}{n}$ $n \geq 1$, $b_n = n$.

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$. $\square$

(b) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ lo è. (Si):

Poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{a_n}{b_n} < 1 \quad \forall n \geq \bar{n}$;

dunque $0 < a_n < b_n \quad \forall n \geq \bar{n}$. Per il criterio del confronto segue allora che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ lo è. $\square$

(c) Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ lo è. (No):

Basta prendere $a_0 = 1$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ $n \geq 1$, $b_n = n \quad \forall n \geq 0$.

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

Si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, ma $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$. $\square$

(d) Se $a_n b_{n+1} \geq a_{n+1} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{b_n}$ è converg. (Si):

Infatti, $\frac{a_n}{b_n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$,

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi per il criterio di Leibniz la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{b_n}$ è convergente. $\square$

6. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua e pari

$F_0: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Stabilite per ciascuna delle seg. affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) f ammette un pt. critico per il teorema di Rolle. (No):

Basta prendere $f(x) = |x|$ su $[-1, 1]$. $\square$

(b) Il nr. di pt. di massimo di f è uguale al nr. di pt. di minimo di f (No):

Basta prendere $f(x) = |x|$ su $[-1, 1]$. Si ha che $x=0$ pt. di minimo, mentre $x=-1$ e $x=1$ sono pt. di massimo di f . $\square$

(c) La funzione F_0 è una funzione dispari. (Si):

Oss. che $[-1, 1]$ è un insieme simmetrico rispetto all'origine. Inoltre

$\forall x \in [-1, 1]$ mi ha

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{\substack{\uparrow \\ t=-s \\ dt=-ds}}{=} - \int_0^x f(-s) ds \stackrel{\substack{\uparrow \\ f \text{ pari}}}{=} - \int_0^x f(s) ds = -F_0(x). \quad \square$$

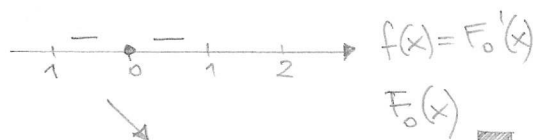
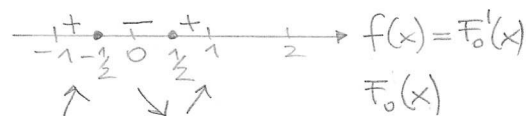
(d) La funzione F_0 è crescente su $[-1, 1]$. (No):

Dal TFC mi ha che $F_0'(x) = f(x) \forall x \in [-1, 1]$. Quindi basta considerare una funzione f continua e pari che cambi segno!

oppure $m \leq 0$.

Per es. $f(x) = |x| - \frac{1}{2}$

$$f(x) = -|x|$$



7. Sia $f(x, y) = \frac{x}{1 - \sqrt{2 - x^2 + 2x - y^2}}$. Abbiamo che

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - x^2 + 2x - y^2 \geq 0, 1 - \sqrt{2 - x^2 + 2x - y^2} \neq 0\}.$$

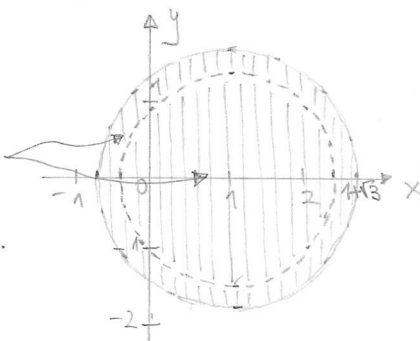
$$\begin{cases} 2 - x^2 + 2x - y^2 \geq 0 \\ \sqrt{2 - x^2 + 2x - y^2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 \leq 2 \\ 2 - x^2 + 2x - y^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 3 \\ (x-1)^2 + y^2 \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Quindi } A = \overline{B}_{\sqrt{3}}(1, 0) \setminus \partial B_{\sqrt{2}}(1, 0).$$

(a) Falsa : A non è aperto, basta oss. che $\partial B_{\sqrt{2}}(1, 0) \subset A$. $\square$

(b) Falsa : A non è convesso:

basta oss. che il segmento congiungente i punti



$(1,0)$ e $(1+\sqrt{3},0)$ non è contenuto in A . $\square$

(c) Falsa : basta oss. che tutti i pt. di $\partial B_{\sqrt{2}}(1,0)$ sono pt.

di accumulazione di A , ma non appartengono ad A $\square$

$$\partial A = \partial B_{\sqrt{2}}(1,0) \cup \partial B_{\sqrt{3}}(1,0).$$

Risulta $\inf_A f = -\infty$: infatti

$$\lim_{y \rightarrow \sqrt{2}^-} f(1,y) = \lim_{y \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{1}{1-\sqrt{3-y^2}} = -\infty$$

$\sup_A f = +\infty$: infatti

$$\lim_{y \rightarrow \sqrt{2}^+} f(1,y) = \lim_{y \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1}{1-\sqrt{3-y^2}} = +\infty.$$

8. Sia $f(x) = \cos \frac{1}{x}$.

(a) Falsa : f non è lipschitziana su $]0,1[$. Sia $x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \rightarrow 0$.

$$\text{Si ha } f'(x_k) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Quindi f' non è limitato!

[Ricordiamo che una funzione derivabile $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è lipschitziana $\Leftrightarrow f'$ è limitato]. $\square$

(b) Falsa : f non è uniformemente continua su $]0,1[$.

Infatti $\exists \bar{\epsilon} > 0$ t.c. $\forall \delta > 0 \exists x, y \in]0,1[$ t.c. $|x-y| < \delta$ e $|f(x)-f(y)| \geq \bar{\epsilon}$.

Sia $\bar{\epsilon} = 2$, sia $\delta > 0$ qualsiasi. Allora per k sufficientemente grande

$$x = \frac{1}{\pi + 2k\pi} \in]0,1[, \quad y = \frac{1}{\pi + (2k+1)\pi} \in]0,1[$$

$$|x-y| < \delta \text{ e } |f(x)-f(y)| = 2.$$

(c) Vera : Basta oss. che $|f'(x)| = \left|\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\right| \leq 1 \quad \forall x \geq 1$.

Ora, grazie al teorema di Lagrange, $\forall x, y \in [1, +\infty[$

$$|f(x)-f(y)| \leq |f'(\xi_{x,y})| |x-y| \leq |x-y|$$

$\uparrow$ stima sopra

Quindi f è lipschitziana su $[1, +\infty[$. $\square$

(d) Vera : f lipschitziana su $[1, +\infty[\Rightarrow f$ uniform. continua su $[1, +\infty[$. $\square$

9. $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = \log(x^2+y^2) + x + 2y$.

(a) $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Allora $\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 1, \frac{2y}{x^2+y^2} + 2 \right)$
 Allora $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x^2 + y^2 = 0 \\ 2y + x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x^2 + y^2 = 0 \\ y + x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Allora inserendo la 1^a eq. nella 2^a eq. otteniamo $2x + x^2 + 4x^2 = 0$,
 ossia $x(2+5x) = 0$, da cui $x=0$ e quindi $y=0$, soluzione non
 accettabile, e $x = -\frac{2}{5}$ e quindi $y = -\frac{4}{5}$.

Allora l'unico pt. critico per f è dato da $\underline{\underline{\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)}}$. □

(b) La matrice hessiana è $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Quindi

$$H_f\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \frac{16}{25} - 2 \cdot \frac{4}{25}}{\frac{16}{25}} & -\frac{32}{\frac{16}{25}} \\ -\frac{32}{\frac{16}{25}} & \frac{2 \cdot \frac{4}{25} - 2 \cdot \frac{16}{25}}{\frac{16}{25}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Oss. che $\det H_f\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -\frac{9}{4} - 4 = -\frac{25}{4} < 0$. Quindi

$\left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ risulta un pt. di sella. □

(c) Ricordiamo che un vettore normale al piano tangente di una funzione
 f in due variabili relatr. al pt. $(x_0, y_0) \in \text{dom } f$ è dato da

$$\underline{n} = (-\nabla f(x_0, y_0), 1) \quad (\text{oppure } (\nabla f(x_0, y_0), -1)).$$

Imponiamo allora il parallelismo con il vettore $(1, 2, 1)$. Quindi cer-
 chiamo i pt. (x, y, λ) t.c.

$$\begin{cases} -\frac{2x}{x^2+y^2} - 1 = \lambda \\ -\frac{2y}{x^2+y^2} - 2 = 2\lambda \\ 1 = \lambda \end{cases}$$

Quindi $\begin{cases} -\frac{2x}{x^2+y^2} - 1 = 1 \\ -\frac{2y}{x^2+y^2} - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{x}{x^2+y^2} = 1 \\ -\frac{y}{x^2+y^2} = 2 \end{cases}$

Risulta quindi $\begin{cases} y = 2x \\ -x = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -x = x^2 + 4x^2 \end{cases}$

quindi $(0,0)$ non accettabile e $(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$. In conclusione, l'unico pt. sul grafico di f in cui il piano tangente al grafico è normale a $(1,2,1)$ è il pt. $(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, f(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}))$. ■

10. $\underline{r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \underline{r}(t) = (\sin 2t, \cos 2t, \cos t)$
 $\underline{r}'(t) = (2 \cos 2t, -2 \sin 2t, -\sin t)$

Allora $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \underline{r}(t), \underline{r}'(t) \rangle dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin 2t \cos 2t - 2 \cos 2t \sin 2t - \cos t \sin t) dt$
 $= -\frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

(b) $\|\underline{r}'(t)\|^2 = (2 \cos 2t)^2 + (-2 \sin 2t)^2 + (-\sin t)^2 = 4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) + \sin^2 t$
 $= 4 + \sin^2 t \quad \forall t \in [0, \pi]$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\underline{r}'(t)\|^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + \sin^2 t) dt = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$
 $= 2\pi + \left[-\frac{\cos t \sin t}{2} + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{9\pi}{4}}}$

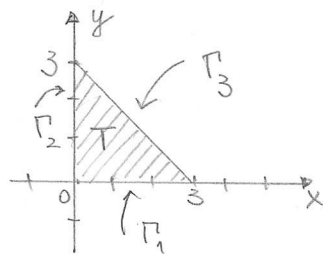
$\int \sin^2 t dt = \int \sin t \sin t dt = -\cos t \sin t + \int \cos^2 t dt$
 $= -\cos t \sin t + \int (1 - \sin^2 t) dt$
 $= -\cos t \sin t + t - \int \sin^2 t dt$
 $\Rightarrow \int \sin^2 t dt = \underline{\underline{\frac{-\cos t \sin t + t}{2}}}$

(c) $P = (0, -1, 0) = \underline{r}(\frac{\pi}{2}) \quad \underline{v} = \underline{r}'(\frac{\pi}{2}) = (-2, 0, -1)$, quindi
 $\underline{v} = (a, b, c)$ con $a = -2$, $b = 0$, $c = -1$. ■

11. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = xy e^{-(x+y)}$

T = triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,3)$ e $(3,0)$ =

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq -x+3\}$$



$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, T è chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo di f su T . Poiché $f \in \mathcal{C}^\infty$, essi possono essere assunti in $\overset{\circ}{T}$ con $\nabla f = \underline{0}$ oppure su ∂T . Ora

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (ye^{-(x+y)} - xy e^{-(x+y)}, xe^{-(x+y)} - xy e^{-(x+y)}) \\ &= e^{-(x+y)} (y(1-x), x(1-y)) \end{aligned}$$

e quindi $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x) = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x,y) = (0,0) \notin \overset{\circ}{T} \\ (x,y) = (1,1) \end{matrix}$

Oss. che $f(1,1) = e^{-2}$.

Studiamo ora f su $\partial T = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Notiamo subito che

$$f|_{\Gamma_1}(x,y) = f|_{\Gamma_2}(x,y) = 0,$$

mentre

$$\begin{aligned} f|_{\Gamma_3}(x,y) &= f(x, -x+3) = x(-x+3)e^{-3} \quad \text{con } x \in [0,3] \\ &= (-x^2+3x)e^{-3} \quad x \in [0,3]. \end{aligned}$$

$$\min_{x \in [0,3]} f(x, -x+3) = f(0,3) = f(3,0) = 0$$

$$\max_{x \in [0,3]} f(x, -x+3) = f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} e^{-3}.$$

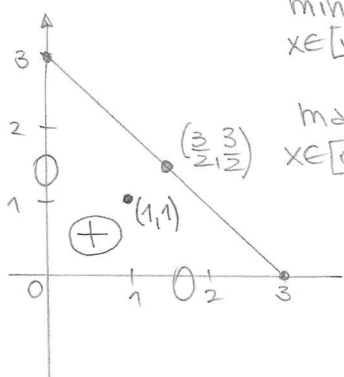
Oss. che $\frac{9}{4} e^{-3} < e^{-2} \Leftrightarrow \frac{9}{4} < e \checkmark$

si ha che

$$\underline{\underline{\min_T f = 0}}$$

$$\underline{\underline{\max_T f = e^{-2}}}.$$

($\frac{9}{4} = 2,25$
 $e = 2,718...$)



12. $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x,y,z) = xyz + 3x^2 - \frac{z^2}{2} - 3 - y^2.$

(a) Oss. che $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $g(-1,0,0) = 3 - 3 = 0$

$$\begin{aligned} g_x(x,y,z) &= yz + 6x \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ &\text{e } g_x(-1,0,0) = -6 \neq 0 \end{aligned}$$

Allora è possibile applicare il teorema della funzione implicita nel pt. $(-1, 0, 0)$. Sia $x = \varphi(y, z)$ la funzione definita implicitamente dall'eq. $g(x, y, z) = 0$ in un intorno del pt. $(-1, 0, 0)$; quindi $x = \varphi(y, z)$ è definita in un intorno U di $(0, 0)$ ed è di classe C^∞ ; abbiamo

$$(*) \quad \begin{cases} \varphi(0, 0) = -1 \\ g(\varphi(y, z), y, z) = 0 \quad \forall (y, z) \in U. \end{cases}$$

□

(b) Usiamo dirett. l'eq. $g(\varphi(y, z), y, z) = \varphi(y, z)yz + 3\varphi^2(y, z) - \frac{z^2}{2} - 3 - y^2 = 0$ $\forall (y, z) \in U$ per determinare tutte le derivate prime e seconde della funzione φ . Abbiamo

$$\varphi(y, z)yz + 3\varphi^2(y, z) - \frac{z^2}{2} - 3 - y^2 = 0 \quad \forall (y, z) \in U.$$

Derivando rispetto a y (e risp. rispetto a z) si ottiene

$$(**) \quad \varphi_y(y, z)yz + \varphi(y, z)z + 6\varphi(y, z)\varphi_y(y, z) - 2y = 0 \quad \forall (y, z) \in U$$

$$(***) \quad \varphi_z(y, z)yz + \varphi(y, z)y + 6\varphi(y, z)\varphi_z(y, z) - z = 0 \quad \forall (y, z) \in U.$$

In particolare, tenendo conto che $\varphi(0, 0) = -1$, in $(0, 0)$ risulta

$$-6\varphi_y(0, 0) = 0 \quad -6\varphi_z(0, 0) = 0,$$

ossia $\nabla\varphi(0, 0) = (0, 0)$ provando così che $(0, 0)$ è un pt. critico per φ .

Calcolando la derivata rispetto a y di $(**)$, rispetto a z di $(**)$ e rispetto a z di $(***)$ si ha rispettiv. $\forall (y, z) \in U$

$$\varphi_{yy}(y, z)yz + 2\varphi_y(y, z)z + 6\varphi_y^2(y, z) + 6\varphi(y, z)\varphi_{yy}(y, z) - 2 = 0$$

$$\varphi_{zy}(y, z)yz + \varphi_y(y, z)y + \varphi_z(y, z)z + \varphi(y, z) + 6\varphi_z(y, z)\varphi_y(y, z) + 6\varphi(y, z)\varphi_{zy}(y, z) = 0$$

$$\varphi_{zz}(y, z)yz + 2\varphi_z(y, z)y + 6\varphi_z^2(y, z) + 6\varphi(y, z)\varphi_{zz}(y, z) - 1 = 0,$$

da cui $-6\varphi_{yy}(0, 0) - 2 = 0$

$$-1 - 6\varphi_{zy}(0, 0) = 0$$

$$-6\varphi_{zz}(0, 0) - 1 = 0.$$

Risulta

$$H_{\varphi}(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $\varphi_{yy}(0,0) = -\frac{1}{3} < 0$, $\det H_{\varphi}(0,0) = \frac{1}{18} - \frac{1}{36} = \frac{1}{36} > 0$;

dunque $(0,0)$ è un pt. di massimo locale stretto per φ . $\square$

(c) L'eq. del piano tangente alla superficie di livello Σ data da $g(x,y,z)=0$ nel pt. $(-1,0,0)$ è data da

$$x = -\underset{\varphi(0,0)}{1} + \langle \nabla \varphi(0,0), (y,z) \rangle,$$

e quindi risulta $x = -1$. $\blacksquare$