A

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	2	3	2	3	3	3	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	3	4	2	4	4		36
Punti ottenuti							

1. (2 punti) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(2z-1)^3 = 1. \qquad\qquad (*)$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

(a) Esistono z_1, z_2 soluzioni di (*) tali che $z_1 = \overline{z_2}$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) Esiste z soluzione di (*) tale che $\mathrm{Im} z = 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) Tutte le soluzioni z di (*) soddisfano $|z| = \frac{1}{2}$. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) Tutte le soluzioni z di (*) soddisfano $\mathrm{Re} z > 0$. ◯ Vera ◯ Falsa

2. (3 punti) Calcolate

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\Big(\cos\frac{1}{x}\Big)\log\Big(\int_1^x e^{3t}\arctan t\,dt\Big).$$

Allora $L_1 =$ ______.

3. (2 punti) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x-\sin x)^{\frac{1}{5}}}{x^\alpha\sqrt{1+x^\alpha}}\,dx.$$

Si ha $\inf E_\alpha =$______ e $\sup E_\alpha =$______.

4. (3 punti) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty}\Big(\sin\big(\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\log\big(1-\frac{2}{\sqrt{n}}\big)-1+e^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{n}}\Big)$$

è convergente. Allora

(a) l'insieme $E_\alpha =$ ______________________.

(b) E_α ammette massimo e minimo. ◯ Vero ◯ Falso

(c) E_α è un intervallo. ◯ Vero ◯ Falso

5. (3 punti) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali positivi tali che

$$a_n = o(b_n) \qquad n \to +\infty.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).

(a) Se $(a_n)_n$ è infinitesima, allora anche $(b_n)_n$ lo è. ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(b) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è convergente, allora anche la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ lo è. ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(c) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora anche la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ lo è. ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(d) Se $a_n b_{n+1} \geq a_{n+1} b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{b_n}$ è convergente. ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

6. (3 punti) Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e pari e $F_0 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale definita da $F_0(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi (fornendo eventualmente un controesempio).

(a) f ammette un punto critico per il teorema di Rolle. ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(b) Il numero di punti di massimo di f è uguale al numero di punti di minimo di f. ◯ Si ◯ No

Perché? ______________________________

(c) La funzione F_0 è una funzione dispari.
◯ Si ◯ No

Perché? ______________________________

(d) La funzione F_0 è crescente su $[-1, 1]$.
◯ Si ◯ No

Perché? ______________________________

7. (3 punti) Sia
$$f(x,y) = \frac{x}{1-\sqrt{2-x^2+2x-y^2}}$$
e A il suo insieme di definizione. Rappresentate A qui a fianco.
Stabilite per ciascuna delle seguenti tre affermazioni se è vera o se è falsa.
   (a) L'insieme A è aperto. ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) L'insieme A è convesso. ◯ Vera ◯ Falsa
   (c) Tutti i punti di accumulazione di A appartengono ad A. ◯ Vera ◯ Falsa

   I punti di frontiera di A sono $\partial A =$ ________________________.

   Risulta $\inf_A f =$ ______ e $\sup_A f =$ ______.

   Perché? ____

8. (3 punti) Sia $f(x) = \cos\frac{1}{x}$.
Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.
   (a) f è lipschitziana su $]0,1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ____

   (b) f è uniformemente continua su $]0,1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

   Perché? ____

   (c) f è lipschitziana su $[1,+\infty[$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (d) f è uniformemente continua su $[1,+\infty[$. ◯ Vera ◯ Falsa

9. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \log(x^2+y^2) + x + 2y.$$
   (a) Determinate i suoi punti critici: ________________________.
   (b) Determinate la natura dei punti critici e motivate la risposta:

   ____.

   (c) Determinate i punti sul grafico di f in cui il piano tangente al grafico è normale a $(1,2,1)$. Si ha

   ________________________.

10. (2 punti) Sia $\mathbf{r} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva di classe $\mathcal{C}^1$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = (\sin 2t, \cos 2t, \cos t).$$

Determinate

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t) \rangle dt =$ ______.

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\mathbf{r}'(t)\|^2 dt =$ ______.

(c) Dopo aver verificato che il punto $P = (0, -1, 0)$ è un punto sul sostegno della curva, determinate il vettore tangente $\mathbf{v}$ alla curva nel punto P.
Risulta $\mathbf{v} = (a, b, c)$, dove $a =$ ______, $b =$ ______, $c =$ ______.

11. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = xye^{-(x+y)}$$

e sia T il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, 0)$. Allora il minimo e il massimo di f su T sono

$$\min_T f = \text{______} \qquad \max_T f = \text{______}.$$

12. (4 punti) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x, y, z) = xyz + 3x^2 - \frac{z^2}{2} - 3 - y^2.$$

(a) Verificate che l'equazione $g(x, y, z) = 0$ definisce in un intorno di $(-1, 0, 0)$ una funzione $x = \varphi(y, z)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Provate che $(0, 0)$ è un punto critico per $\varphi(y, z)$ e determinate la sua natura. Esso è un punto di ____.

(c) L'equazione del piano tangente alla superficie di livello Σ data da $g(x, y, z) = 0$ nel punto $(-1, 0, 0)$ è ______________.