

(A)

1. Vedi A5_05-09_Fis, Es. 1

2. " , Es. 3

3. " , Es. 6

4. " , Es. 8

5. " , Es. 9

6. " , Es. 11

$$7. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{(\sin x)(\sin y^3)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) f è continua in $(0,0)$. (V):

Infatti

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{|x||y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x||y|^2}{x^2+y^2} \leq |y| \leq |x| + |y| \rightarrow 0 \quad \text{per } (x,y) \rightarrow (0,0)$$

(b) f è derivabile in $(0,0)$. (V):

$$\text{oss. che } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x,0) = 0; \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0;$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(0,y) = 0; \text{ quindi } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

(c) f è differenziabile in $(0,0)$. (V):

Infatti, $\forall \underline{h} = (h,k) \neq (0,0)$ abbiamo

$$\frac{f(\underline{0} + \underline{h}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = \frac{(\sin h)(\sin k^3)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Ora

$$0 \leq \left| \frac{(\sin h)(\sin k^3)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \frac{|k^3|}{(h^2+k^2)} \leq |k| \leq |h| + |k| \rightarrow 0 \quad \text{per } (h,k) \rightarrow (0,0)$$

$$\text{Quindi } \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{f(\underline{0} + \underline{h}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = 0.$$

(d) (Si) Basta oss. $0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{1}{x^2+y^2} \rightarrow 0$ per $\|(x,y)\| \rightarrow +\infty$. Quindi il limite $\exists$ e vale 0. $\square$

8. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y^2 - 8x^2; \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2).$

Cerchiamo i pt. critici di f . Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 16x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6y.$$

Quindi gli eventuali pt. critici sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} 4x(x^2 - 4) = 0 \\ 3y(y - 2) = 0. \end{cases}$$

La 1^a eq. dà $x=0$ oppure $x=\pm 2$, mentre la 2^a eq. dà $y=0$ oppure $y=2$. Pertanto i punti critici sono sei:

$$(0,0), \quad (0,2), \quad (\pm 2,0), \quad (\pm 2,2).$$

Studiamo ora la matrice hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Quindi

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{Oss. che } f_{xx}(0,0) < 0, \det H_f(0,0) = 96 > 0.$$

$$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{Oss. che } \det H_f(0,2) = -96 < 0.$$

$$H_f(\pm 2,0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{Oss. che } \det H_f(\pm 2,0) = -192 < 0.$$

$$H_f(\pm 2,2) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{Oss. che } f_{xx}(0,0) > 0, \det H_f(\pm 2,2) = 192 > 0.$$

Allora

(a) i pt. di sella di f sono $(0,2)$, $(\pm 2,0)$. ☐

(b) i pt. di min. loc. stretto di f sono $(\pm 2,2)$. ☐

(c) i pt. di max. loc. stretto di f sono $(0,0)$. ☐

(d) l'eq. del piano tg al grafico di f nel pt $P_0 = (2,0, f(2,0)) = (2,0,-16)$

è $z = -16 + \langle \nabla f(2,0), x - x_0 \rangle$, e quindi $ax + by + z + c = 0$

con $a=0$, $b=0$ e $c=16$. 

9. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2|y|}$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2|y| \geq 0\}.$

Abbiamo $1-x^2|y| \geq 0 \iff x^2|y| \leq 1$

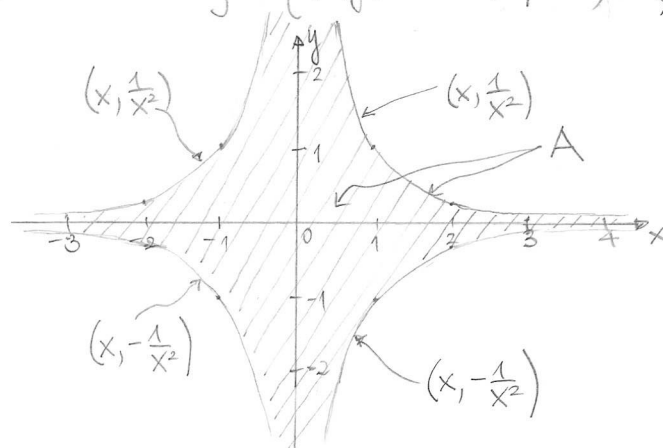
se $x=0$ $x^2|y| \leq 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

se $x \neq 0$ $x^2|y| \leq 1 \iff |y| \leq \frac{1}{x^2}$

$\iff -\frac{1}{x^2} \leq y \leq \frac{1}{x^2}.$

Quindi

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, -\frac{1}{x^2} \leq y \leq \frac{1}{x^2}\}.$



□

(a) $\partial A = \{(x, \pm \frac{1}{x^2}) ; x \neq 0\}.$ È un insieme limitato? (No)

infatti, $\forall M > 0 \quad \exists (x, \frac{1}{x^2}) \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{t.c.}$

$\|(x, \frac{1}{x^2})\| \geq M$

ossia $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^4}} \geq M.$

Basta prendere $(x, \frac{1}{x^2}) = (M, \frac{1}{M^2}).$

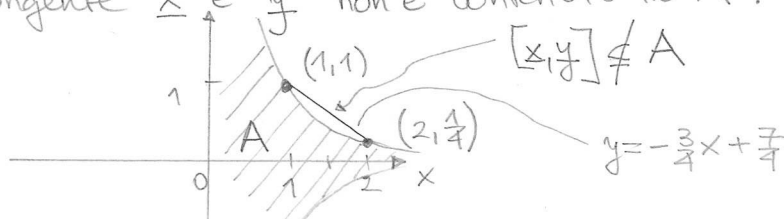
□

(b) A è un insieme chiuso? (Sì) : $\partial A \subseteq A.$

□

(c) L'insieme A è convesso? (No) : basta oss. che

preso, per es., $x=(1,1) \in \partial A$ e $y=(2, \frac{1}{4}) \in \partial A$ il segmento $[x,y]$ congiungente x e y non è contenuto in $A.$



Risulta che $(\frac{3}{2}, \frac{5}{8})$ è un elemento di $[x,y]$ ma $\frac{5}{8} > \frac{1}{(\frac{3}{2})^2}$ ossia $\frac{5}{8} > \frac{4}{9}.$

□

(d) $f(A) = \underline{[0,1]}$: $\sqrt{1-x^2|y|}$ è una funzione continua su A :
 essa sarà minima se $x^2|y|=1$; ossia $\forall (x,y) \in \partial A$,
 essa sarà massima se $x^2|y|=0$, ossia se $x=0$ o $y=0$.
 Essendo $f(1,y)$ continua su $[0,1]$, $f(1,0)=1$,
 $f(1,1)=0$, essa assume tutti i valori tra 0 e 1.
 Abbiamo $f(A) = \underline{[0,1]}$. È compatto? (Sì).
 L'immagine è un insieme compatto essendo chiuso e limitato.

10. Sia $\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\underline{r}(t) = (2\cos t, -4\sin t, 2t)$.

(a) $\underline{r}$ è una curva regolare? (Sì)

Oss. che $\underline{r} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, poiché ogni componente di $\underline{r}$ è di classe $\mathcal{C}^1$.
 Inoltre $\underline{r}'(t) = (-2\sin t, -4\cos t, 2) \forall t \in \mathbb{R}$ e quindi $\underline{r}'(t) \neq (0,0,0)$
 $\forall t \in \mathbb{R}$. □

(b) Oss. che $\underline{r}(0) = (2, 0, 0)$ e $\underline{r}'(0) = (0, -4, 2)$. L'eq. parametrica della retta tg. alla curva nel pt. $\underline{r}(0) = (2, 0, 0)$ è quindi

$$\underline{x} = \underline{r}(0) + \underline{r}'(0)s \quad s \in \mathbb{R},$$

ossia

$$\begin{cases} x = 2 + 0 \cdot s \\ y = 0 - 4 \cdot s \\ z = 0 + 2 \cdot s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}, \text{ da cui } \begin{cases} x = 2 \\ y = -4s \\ z = 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Risulta che l'eq. cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel pt. $\underline{r}(0)$ è

$$\begin{cases} x + a = 0 \\ y + bz = 0 \end{cases}$$

dove $a = -2$ e $b = 2$. □

(c) $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $h(x,y,z) = x^2y + \sin(y+z)$.

Ora basta oss. che $(h \circ \underline{r})(t) = (2 \cos t)^2 (-4 \sin t) + \sin(-4 \sin t + 2t) \forall t$
 $= -16 \cos^2 t \sin t + \sin(-4 \sin t + 2t)$

Ne segue che $(h \circ \underline{r})'(t) = +32 \cos t \sin^2 t - 16 \cos^3 t + [\cos(-4 \sin t + 2t)] \cdot$
 $\cdot [-4 \cos t + 2] \quad \forall t$

da cui $\underline{(h \circ \underline{r})'(0)} = -16 + (-2) = \underline{-18.}$ ▀

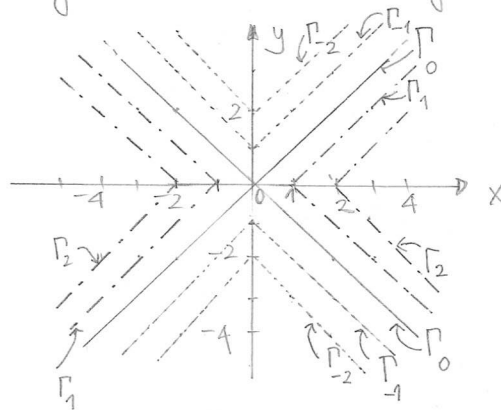
11. $f(x,y) = |x| - |y|$.

(a) $\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\} \quad c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Oss. $|x| - |y| = 0 \Leftrightarrow |x| = |y|$

$|x| - |y| = -1 \Leftrightarrow |y| = |x| + 1 \Leftrightarrow (y = |x| + 1 \text{ o } y = -(|x| + 1))$

$|x| - |y| = 1 \Leftrightarrow |x| = |y| + 1 \Leftrightarrow (x = |y| + 1 \text{ o } x = -(|y| + 1))$



alcune curve di livello di f .

□

(b) Abbiamo $\frac{f(0+t\mathbf{v}) - f(0)}{t} = \frac{f(t\mathbf{v}) - f(0)}{t} =$
 $t \neq 0$

$= \frac{|t|(|\cos \theta| - |\sin \theta|)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \exists \text{ se e solo se}$

$|\cos \theta| - |\sin \theta| = 0 \Leftrightarrow |\cos \theta| = |\sin \theta|$. Risulta $\underline{\theta = \frac{\pi}{4}}$, $\underline{\theta = \frac{3\pi}{4}}$. □

(c) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + 4y^2 = 16\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$

(d) = ellisse centrata in $(0,0)$ di semiasse $a=1$ e $b=2$.

Risulta subito disegnando E e tenendo conto delle curve di livello di f che

$\min_E f = \underline{-2}$ pr. di min. $\underline{(0,-2) \text{ e } (0,2)}$; $\max_E f = \underline{1}$ pr. di max $\underline{(-1,0) \text{ e } (1,0)}$. ▀

12. $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x,y) = -x \operatorname{arctg} y + x^2 + \int_0^{\sin y} e^{-t^2} dt$.

(a) $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$; $g(0,0) = 0$. Inoltre

$$g_y(x,y) = -\frac{x}{1+y^2} + e^{-\sin^2 x} \cos y \quad g_y(0,0) = 1 \neq 0.$$

Allora è possibile applicare il teorema della funzione implicita (del Dini) nel pt. $(0,0)$. Quindi $\exists$ un intorno U di $x_0=0$ ed $\exists!$ $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty(U)$ tale che $\varphi(0)=0$ e $\forall x \in U$

$$g(x, \varphi(x)) = 0, \quad \text{ovvero} \quad -x \operatorname{arctg} \varphi(x) + x^2 + \int_0^{\sin \varphi(x)} e^{-t^2} dt = 0. \quad \square$$

(b) Partendo direttamente dall'eq.

$$-x \operatorname{arctg} \varphi(x) + x^2 + \int_0^{\sin \varphi(x)} e^{-t^2} dt = 0 \quad \forall x \in U$$

si ottiene derivando

$$(*) \quad -\operatorname{arctg} \varphi(x) - \frac{x \varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)} + 2x + \varphi'(x) \cos \varphi(x) e^{-\sin^2 \varphi(x)} = 0 \quad \forall x \in U;$$

in particolare, tenendo conto che $\varphi(0)=0$ si ha

$$\underline{\underline{\varphi'(0) = 0}},$$

e quindi $x_0=0$ è un pt. critico di φ .

Derivando (*) si ha $\forall x \in U$

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)} - \frac{[\varphi'(x) + x \varphi''(x)](1+\varphi^2(x)) - x \varphi'(x) 2\varphi(x) \varphi'(x)}{(1+\varphi^2(x))^2} + 2 + \\ + \varphi''(x) \cos \varphi(x) e^{-\sin^2 \varphi(x)} - (\varphi'(x))^2 \sin \varphi(x) e^{-\sin^2 \varphi(x)} \\ - 2(\sin \varphi(x)) [\cos \varphi(x) \varphi'(x)]^2 = 0. \end{aligned}$$

In particolare, tenendo conto che $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ si ha

$$2 + \varphi''(0) = 0, \quad \text{ovvero} \quad \underline{\underline{\varphi''(0) = -2}},$$

quindi $\underline{\underline{x_0=0}}$ è un pt di massimo loc. stretto.

(c) Infine, $\varphi(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$, e quindi $\varphi(x) + \alpha \sin x^2 = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0 \iff \underline{\underline{\alpha = 1}}$.

