A

COGNOME E NOME: ______________________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	2	3	3	3	3	4	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	4	3	2	3	3		36
Punti ottenuti							

1. (2 punti) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione
$$z^4 + z^2 - 2 = 0.$$
Le soluzioni sono

____

2. (3 punti) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che esiste finito
$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\arctan x}(\log(1+3x) - \sin 3x + \alpha x^2)}{1 - \cos\sqrt{x^3}}.$$
Allora $\alpha =$ ______ e per tale α si ha $L =$ ______.

3. (3 punti) Sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\arccos\frac{1}{n^2}}{n^\alpha \log(1+n^n)}$$
risulta convergente. Allora

(a) $\inf E_\alpha =$ ______ e $\sup E_\alpha =$ ______

(b) L'insieme E_α è limitato. ◯ Vero ◯ Falso

4. (3 punti) (a) Discutete qui sotto la convergenza del seguente integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx.$$

___

(b) Usando la definizione determinate poi il suo valore. Si ha $I =$ ______.

5. (3 punti) Sia $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in $]-1,1[$. Stabilite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (fornendo eventualmente un controesempio).

(a) Se $f'' > 0$ su $]-1,1[$, allora $\forall x, y \in]-1,1[$ si ha $[(x < y) \Rightarrow (f'(x) < f'(y))]$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ___

(b) Se $f''(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in]-1,1[$, allora x_0 è un punto di flesso. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ___

(c) Se esistono due punti distinti $x_1, x_2 \in]-1,1[$ tali che $f'(x_1) = f'(x_2)$, allora f'' deve annullarsi in un punto di $]-1,1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ___

(d) Se $\exists x_0 \in]-1,1[$ tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in]-1,1[$, allora x_0 è un punto di minimo globale per f su $]-1,1[$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ___

6. (4 punti) (a) Determinate la soluzione $\widehat{y}(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4\cos 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Si ha $\widehat{y}(x) =$ ______________________.

(b) L'equazione della retta tangente al grafico di $\widehat{y}$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$ risulta ________________

(c) Il polinomio di Taylor di $\widehat{y}$ di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ risulta ________________

7. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(\sin x)(\sin y^3)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è continua in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(b) f è derivabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(c) f è differenziabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

Perché? ______________________________

(d) Esiste $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y)$? ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

8. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^4 + y^3 - 3y^2 - 8x^2.$$

Allora

(a) i punti di sella di f sono

____

(b) i punti di minimo locale stretto di f sono

____

(c) i punti di massimo locale stretto di f sono

____

(d) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (2, 0, f(2,0))$ è

$$ax + by + z + c = 0,$$

dove $a =$ ______, $b =$ ______ e $c =$ ______.

9. (3 punti) Sia $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2|y|}$ e A il suo insieme di definizione. Rappresentate A qui a fianco.

(a) $\partial A=$ ______________________________. E' un insieme limitato? ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(b) A è un insieme chiuso? ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(c) L'insieme A è convesso? ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

(d) L'insieme $f(A) =$ ______. E' compatto? ◯ Sì ◯ No

Perché? ______________________________

10. (2 punti) Sia data la curva $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t, -4\sin t, 2t).$$

(a) $\mathbf{r}$ è una curva regolare? ◯ Si ◯ No

Perché ____

(b) L'equazione cartesiana della retta tangente al sostegno della curva nel punto corrispondente a $t = 0$ è

$$\begin{cases} x + a = 0 \\ y + bz = 0, \end{cases}$$

dove $a =$ ______ e $b =$ ______.

(c) Sia $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$h(x, y, z) = x^2 y + \sin(y + z).$$

Allora $(h \circ \mathbf{r})'(0) =$ ______.

11. (3 punti) Sia $f(x, y) = |x| - |y|$.

(a) Rappresentate graficamente qui a fianco le curve di livello $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ per $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

(b) Sia $v = (\cos\theta, \sin\theta)$. Individuate $\theta \in [0, \pi]$ tale che f è derivabile in $(0, 0)$ lungo la direzione v. Risulta $\theta =$ ____________

Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + 4y^2 = 16\}$.

(c) $\min\limits_E f =$ ______. I punti di minimo sono ________________.

(d) $\max\limits_E f =$ ______. I punti di massimo sono ________________.

12. (3 punti) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x, y) = -x \arctan y + x^2 + \int_0^{\sin y} e^{-t^2}\, dt.$$

(a) Verificate che l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $x_0 = 0$ tale che $\varphi(x_0) = 0$.

____

(b) Provate che x_0 è un punto critico di φ e determinate la sua natura.

Esso è un punto di ____________________________. Rappresentate graficamente (qui a fianco) φ in un intorno di 0.

(c) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) + \alpha \sin x^2 = o(x^2)$ per $x \to 0$. Si ha $\alpha =$ ______.