

(A) 1. Vedi A1-24-01 (CdL in Fisica) Es. 1

2. " " Es. 4

3. " " Es. 6

4. " " Es. 8

5. " " Es. 7

6. " " Es. 9

7. " " Es. 10

8. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$; $f(x,y) = 2\alpha x^2 + y^2 - \alpha^2 xy$

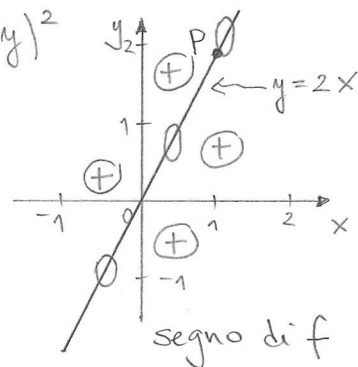
Risulta $\nabla f(x,y) = (4\alpha x - \alpha^2 y, 2y - \alpha^2 x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Allora } \nabla f(1,2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\alpha^2 = 0 \\ 4 - \alpha^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha(2-\alpha) = 0 \\ \alpha = \pm 2. \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione di questo sistema è $\alpha = 2$.

Abbiamo allora $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4xy = (2x - y)^2$

Oss. che $f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) : y = 2x$,
 mentre è > 0 altrimenti.



Allora, guardando semplicemente il segno di f

(a) P è un pt. di minimo locale per f (V);

(b) P è un pt. di minimo assoluto per f (V).

(c) La matrice hessiana di f nel pt. P è definita positiva (F)

Infatti $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

in particolare $H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

per cui $\det H_f(1,2) = 0$. Oss. che lo studio della matrice hessiana non ci avrebbe permesso di rispondere alle domande (a), (b).

(d) Pè l'unico pt. critico di f (F)

Tutti i pt. $(x, 2x) \forall x \in \mathbb{R}$ sono pt. critici. $\square$

Oss. che $\forall c \geq 0$ mi ha $f(x, y) = c^{(*)} \Leftrightarrow (2x - y)^2 = c$

$$\Leftrightarrow 2x - y = \pm \sqrt{c}$$

$$\Leftrightarrow y = 2x \pm \sqrt{c} \quad c \geq 0.$$

Quindi le curve di livello per $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4xy$ sono rette, $\blacksquare$

9. Sia $g(x, y) = x \sin x - y - \int_0^y e^{t^2} dt$. Notiamo che $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Vorremmo applicare il teorema della funzione implicita relativ. al pt. $(0, 0)$.

Abbiamo

$$g(0, 0) = 0$$

$$g_y(x, y) = -1 - e^{y^2}, \quad \text{quindi } g_y(0, 0) = -2 \neq 0.$$

↑
TFC

Allora l'eq. $g(x, y) = 0$ definisce univocamente, in un intorno del pt. $(0, 0)$ la funzione implicita $y = \varphi(x)$: si ha

$$\varphi(0) = 0$$

$$g(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U, \text{ intorno di } x_0 = 0;$$

inoltre $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Allora, da

$$x \sin x - \varphi(x) - \int_0^{\varphi(x)} e^{t^2} dt = 0 \quad \forall x \in U$$

si ottiene derivando

$$(*) \quad \sin x + x \cos x - \varphi'(x) - e^{\varphi(x)^2} \varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in U$$

e in particolare per $x_0 = 0$

$$-\varphi'(0) - e^{\varphi^2(0)} \varphi'(0) = 0, \text{ ossia } \underline{\underline{\varphi'(0) = 0.}}$$

Derivando ulteriormente l'eq. $(*)$ si ottiene

$$(**) \quad 2 \cos x - x \sin x - \varphi''(x) - 2e^{\varphi(x)^2} \varphi(x) (\varphi'(x))^2 - e^{\varphi(x)^2} \varphi''(x) = 0$$

$\forall x \in U$

e in particolare per $x_0 = 0$

$$2 - \varphi''(0) - 2e^{\varphi^2(0)} \varphi(0) (\varphi'(0))^2 - e^{\varphi^2(0)} \varphi''(0) = 0,$$

$(*)'$ ovviamente se $c < 0$,
 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} = \emptyset.$

ossia $\varphi''(0) = 1 > 0$.

Risulta

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0 \\ &= 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0\end{aligned}$$

ossia lo sviluppo di Taylor di φ di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ è

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Posiamo allora stabilire quali delle affermazioni (a) - (d) sono vere e quali false:

- (a) La funzione φ ha un pt. critico in $x_0 = 0$. (V) $(\varphi'(0) = 0)$
 (b) La funzione φ ha un minimo locale stretto in $x_0 = 0$. (V) $(\varphi'(0) = 0, \varphi''(0) > 0)$
 (c) Si ha $\varphi(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. (F) $\frac{\varphi(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0. \quad \square$

- (d) L'eq. definisce implicitamente una funzione $x = \psi(y)$ di classe C^∞ in un intorno di $y_0 = 0$. (F)

Basta oss. che $g_x(x, y) = \sin x + x \cos x$, ossia $g_x(0, 0) = 0$.

Quindi l'eq. $g(x, y) = 0$ non definisce implicitamente una funzione $x = \psi(y)$ di classe C^∞ in un intorno di $y_0 = 0$ tale che $\psi(0) = 0$. $\blacksquare$

10. $\underline{r}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \underline{r}(t) = (\sqrt{5}t, 2\cos t, 2(1+\sin t)).$

Allora $\underline{r}'(t) = (\sqrt{5}, -2\sin t, 2\cos t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\underline{r}''(t) = (0, -2\cos t, -2\sin t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Quindi $\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}$
 $= \sqrt{5 + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}, \quad \forall t \in \mathbb{R};$

$\|\underline{r}''(t)\| = \sqrt{0 + (-2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \square$

Oss. che $\underline{r}(0) = (0, 2, 2)$ e $\underline{r}'(0) = (\sqrt{5}, 0, 2)$. Allora

l'eq. parametrica della retta tg. alla curva nel pt. $(0, 2, 2)$ risulta

$$\begin{cases} x = 0 + \sqrt{5}s \\ y = 2 + 0 \cdot s \\ z = 2 + 2 \cdot s \end{cases}, \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x = \sqrt{5}s \\ y = 2 \\ z = 2 + 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\begin{cases} x = \sqrt{5}s \\ y = a + bs \\ z = c + ds \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}, \text{ con } \underline{a=2}, \underline{b=0}, \underline{c=2}, \underline{d=2}.$ ▀

11. Sia $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ la funzione definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e sia $\mathcal{C}$

la curva data dall'eq. $g(x,y) = \log(1+x^2) + y^2 - 1 = 0$, Oss. che :

$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ è un insieme chiuso, poiché $\mathcal{C} = g^{-1}(\{0\})$

(g è continua e $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$). Inoltre $\mathcal{C}$ è un insieme limitato :

infatti, $\forall (x,y) \in \mathcal{C} \quad \begin{cases} \log(1+x^2) \leq 1 & \Leftrightarrow x^2 \leq e-1 < e \\ y^2 \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{C} \subset \overline{B}_{\sqrt{2e}}(0).$

Infine $0 \notin \mathcal{C}$ poiché $g(0,0) = \log 1 + 0 - 1 \neq 0$.

Quindi, $f|_{\mathcal{C}}$ è ben definita, è continua sull'insieme compatto $\mathcal{C}$:

quindi gli estremi assoluti di f su $\mathcal{C}$ esistono per il teorema di Weierstrass.

Oss. che $\nabla g(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2}, 2y \right) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Poiché $0 \notin \mathcal{C}$, possiamo asserire che tutti i pt. di $\mathcal{C}$ sono

pt. regolari. Possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di

Lagrange alla determinazione dei pt. stazionari di $f(x,y)$ su $\mathcal{C}$.

Imponiamo direttamente che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0. \quad \text{Oss. che } \det \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2x}{1+x^2} \\ \frac{2y}{x^2+y^2} & 2y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4xy - \frac{4xy}{1+x^2} = 0$$

$$4xy \left(\frac{1+x^2-1}{1+x^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y \neq 0 \end{matrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{matrix} y=0 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

Dall'eq. del vincolo $\log(1+x^2)+y^2-1=0$ si ottiene allora nel caso $x=0$ i punti $(0,-1)$ e $(0,1)$; nel caso $y=0$ i punti $(-\sqrt{e-1}, 0)$ e $(\sqrt{e-1}, 0)$.

Allora si ha $\min_{\mathcal{C}} f = f(0,-1) = f(0,1) = 0 = m$

$$\max_{\mathcal{C}} f = f(-\sqrt{e-1}, 0) = f(\sqrt{e-1}, 0) = \log(e-1) = M.$$

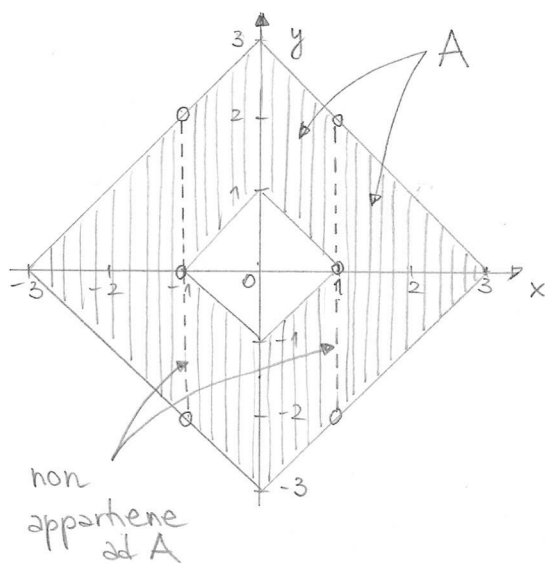
Dunque $\underline{e^m} = e^0 = \underline{1}$; $\underline{e^M} = e^{\log(e-1)} = \underline{e-1}$. ■

12. $f(x,y) = \frac{\arcsin(2-|x|-|y|)}{\sqrt[3]{1-x^2}}$, A l'insieme di definizione.

Allora

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 2-|x|-|y| \leq 1, \quad 1-x^2 \neq 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |x|+|y| \leq 3, \quad x^2 \neq 1\}$$



Allora si ha subito:

(a) A è aperto (F) :

per es. $(3,0) \in A$, ma $\forall r > 0$

si ha $B_r((3,0)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) \neq \emptyset$. □

(b) $\partial B_1(0) \subset A$ (F)

$(1,0) \in \partial B_1(0)$ e $(1,0) \notin A$ □

(c) A è connesso per poligonali (F) :

per es. $(-2,0)$ e $(2,0)$ appartengono

ad A, ma non possono essere collegati mediante una poligonale tutta contenuta in A. □

d) $\bar{A}$ è compatto (V) $\bar{A}$ è chiuso e limitato. □

e) $\{(-1,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 2\} \subset \partial A$ (V)

Ogni intorno di $(-1,y)$, $y \in [-2,2]$ contiene sia pt. di A che pt. di $\mathbb{R}^2 \setminus A$, quindi $(-1,y)$ con $y \in [-2,2]$ è un elemento di ∂A . ■