

(A) 1. Vedi A2_07_02 (CdL in Fisica) Es. 4

2. " Es. 1

3. " Es. 6

4. " Es. 7

5. " Es. 8

6. " Es. 9

7. " Es. 10

8. Abbiamo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin x}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) f è continua in $(0,0)$, ma non è derivabile in $(0,0)$ (F):

$$\left. \begin{array}{l} \forall x, f(x,0) = 0 \\ \forall y, f(0,y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

f è derivabile in $(0,0)$. $\square$

(b) f è derivabile in $(0,0)$, ma non è continua in $(0,0)$ (F):

f è continua in $(0,0)$:

$$\forall (x,y) \neq (0,0) \quad 0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{y^2 |\sin x|}{2x^2 + y^2} \leq \frac{y^2}{2x^2 + y^2} \leq |\sin x| \leq |x|$$

$\downarrow (x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

$\square$

(c) f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni (V):

f è derivabile lungo $\underline{v} = \underline{e}_1$, $\underline{v} = \underline{e}_2$ (vedi (a)).

Sia $\underline{v} = (v_1, v_2)$, $\|\underline{v}\| = 1$, $\underline{v} \neq \underline{e}_1$, $\underline{v} \neq \underline{e}_2$. Sia $t \neq 0$

$$\frac{f(\underline{0} + t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t} = \frac{f(t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t} = \frac{\frac{v_2^2 \sin tv_1}{2v_1^2 + v_2^2}}{t} = \frac{v_2^2 \sin tv_1}{(2v_1^2 + v_2^2)t}$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

In definitiva, $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\underline{v}\| = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{0} + t\underline{v}) - f(\underline{0})}{t} = 0$

tale limite vale 0. Si ha $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2, \|\underline{v}\|=1 \quad D_{\underline{v}} f(\underline{0})=0. \quad \square$

(d) f è differenziabile in $(0,0)$ (F):

Abbiamo (vedi a)) $\nabla f(\underline{0}, \underline{0}) = \underline{0}$. Quindi $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^2, \|\underline{h}\| \neq 0$
 $\underline{h} = (h_1, h_2)$

$$\frac{f(\underline{0}+\underline{h}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = \frac{h_2^2 \sinh_1}{(2h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Consid. in particolare $\underline{h} = (h_1, h_1)$, $h_1 > 0$ si ha

$$\frac{f(\underline{0}+\underline{h}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = \frac{h_1^2 \sinh_1}{3h_1^2 \sqrt{2} h_1} \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0^+} \frac{1}{3\sqrt{2}} \neq 0;$$

$\Rightarrow \lim_{\underline{h} \rightarrow \underline{0}} \frac{f(\underline{0}+\underline{h}) - f(\underline{0}) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} = 0$ non può essere verificato;

f non è differenziabile in $(0,0)$. ■

9. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^4 - 3x^2 - 8y^2$; $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. 1 pt. di estremo
 Sono pt. critici per f .

Abbiamo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6x$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 16y$.

Risulta $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ 4y(y^2-4) = 0. \end{cases}$

Sono soluzioni di questo sistema i seg. pt.

$(0,0) \quad (0, \pm 2) \quad (2,0) \quad (2, \pm 2).$

Abbiamo quindi 6 punti critici per f . Per studiare la loro natura determiniamo la matrice hessiana $H_f(x,y)$.

Notiamo

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 12y^2-16 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

da cui

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \det H_f(0,0) &= (-6)(-16) > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= -6 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0,0) \text{ pt. di max. loc. stretto per } f;$$

$$H_f(0, \pm 2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(0, \pm 2) = -192 < 0 \Rightarrow (0, \pm 2) \text{ pt. di sella;}$$

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(2,0) = -96 < 0 \Rightarrow (2,0) \text{ pt. di sella;}$$

$$H_f(2,\pm 2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \det H_f(2,\pm 2) &= 192 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,\pm 2) &= 6 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2,\pm 2) \text{ pt. di min. loc. stretto per } f.$$

Allora

(a) f ha in (a,b) con $a=0$ e $b=0$ un pt. di massimo locale stretto. $\square$

(b) f ha in $(a,-2)$ con $a=2$ un pt. di minimo locale stretto. $\square$

(c) $v = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ con $\vartheta = \pi$ è la direzione lungo cui è massima la crescita di f nel pt. $(1,2)$: infatti, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ ed è quindi differenziabile in $\mathbb{R}^2$, e in particolare, in $(1,2)$. Inoltre $\nabla f(1,2) = (-3,0) \neq (0,0)$. La direzione di massima crescita di f in $(1,2)$ è individuata da $v = \frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = (-1,0)$. Da $(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = (-1,0)$ segue $\vartheta = \pi$. $\square$

Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Allora A è limitato, poiché $A \subseteq \overline{B}_{\sqrt{2}}(0)$. Inoltre è chiuso, poiché $A = g_1^{-1}([0, +\infty[) \cap g_2^{-1}(]-\infty, 0])$ dove $g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, funz. continua su $\mathbb{R}^2$ e $g_2(x,y) = x^2 + y^2 - 2$, funzione continua su $\mathbb{R}^2$.
 l'intersezione di due insiemi chiusi è chiusa!

(Teorema di Heine-Borel) Essendo A un insieme compatto e f una funzione continua su A , risulta che $f(A)$ è compatto (per succ.) e quindi, per il teorema di Heine-Borel, $f(A)$ è un sottoinsieme limitato (e chiuso) di $\mathbb{R}$.

Vera. $\square$

f è uniformemente continua su A . Vera : segue dal teorema di Heine-Cantor essendo una funzione continua su un insieme compatto. $\blacksquare$

10. Sia $\mathcal{C}$ la curva piana data dall'eq.

$$x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) + 2ye^{x-1} = 0$$

$$P = (1,1) \in \mathcal{C} : \text{infatti} \quad 1+1-2(1+1)+2 \cdot 1 e^0 = \\ = 2-4+2=0.$$

Poniamo $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) + 2ye^{x-1}$. L'eq. della retta tg a $\mathcal{C}$ in P si scrive

$$\frac{\partial g}{\partial x}(P)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(P)(y-1) = 0.$$

$$\text{Ora } \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x + 2ye^{x-1} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4y + 2e^{x-1} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 2.$$

$$\text{Quindi} \quad 2(x-1) + 2(y-1) = 0, \text{ ossia } x+y-2=0.$$

Quindi

$$ax+by-2=0$$

è l'eq. della retta tangente a $\mathcal{C}$ in P se e solo se $a=b=1$. $\square$

Oss. che $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ (anzi $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$). Vorremmo applicare il teorema della funzione implicita relativ. al pt. $(1,1)$. Abbiamo (già visto sopra)

$$g(1,1) = 0$$

$$g_y(x,y) = 4y^3 - 4y + 2e^{x-1}, \text{ quindi } g_y(1,1) = 2 \neq 0.$$

Allora l'eq. $g(x,y)=0$ definisce univocamente, in un intorno del pt. $(1,1)$

la funzione implicita $y=\varphi(x)$: mi ha

$$\begin{cases} \varphi(1)=1 \\ g(x, \varphi(x))=0 \end{cases} \quad \forall x \in U, \text{ intorno di } x_0=1.$$

Il polinomio di Taylor di ordine 1 di φ centrato in $x_0=1$ risulta

$$P_{1,1}(x) = c + d(x-1) = -x+2 \\ = 1-(x-1)$$

(eq. retta tangente al grafico di φ in $x_0=1 \Leftrightarrow$ eq. retta tangente a $\mathcal{C}$ in P)

dunque deve essere $c=1$ e $d=-1$.

in alternativa $\rightarrow$ (poiché $c=\varphi(1)=1$ e $d=\varphi'(1)$, mi può ricavare $\varphi'(1)$ anche derivando l'eq. $g(x, \varphi(x))=0 \quad \forall x \in U$, e calcolandola poi in $x_0=1$, oppure direttamente dalla formula $\varphi'(1) = -\frac{g_x(1,1)}{g_y(1,1)}$). $\blacksquare$

11. Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ le funz. definite da

$$f(t) = (2e^t, t, e^{2t}) \quad g(x, y, z) = z^2 + zx - y.$$

(a) Abbiamo $(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(2e^t, t, e^{2t}) = e^{4t} + 2e^{3t} - t.$

Allora $g \circ f$ è derivabile $\forall t \in \mathbb{R}$ e mi ha

$$(g \circ f)'(t) = 4e^{4t} + 6e^{3t} - 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In particolare

$$(g \circ f)'(0) = 4 + 6 - 1 = 9.$$

□

(b) $\int_0^2 \|f'(t)\| dt = \underline{ae^b + c}$ con $\underline{a=1, b=4}$ e $\underline{c=1}$:

Infatti, $f'(t) = (2e^t, 1, 2e^{2t}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \sqrt{(2e^t)^2 + 1^2 + (2e^{2t})^2} = \sqrt{4e^{2t} + 1 + 4e^{4t}} \\ &= \sqrt{(2e^{2t} + 1)^2} = 2e^{2t} + 1. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^2 \|f'(t)\| dt = \int_0^2 (2e^{2t} + 1) dt = [e^{2t} + t]_0^2 = e^4 + 2 - 1 = e^4 + 1.$$

□

(c) $\underline{\Delta g(1, 1, 2) = 2}.$

$$\text{Infatti } \Delta g(x, y, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x, y, z)$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

poiché $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3).$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) &= z & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) &= -1 & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) &= 2z + x & \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x, y, z) &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\text{Risulta } \Delta g(1, 1, 2) = 0 + 0 + 2 = 2.$$

■

12. Sia $f(x, y) = \frac{6}{\pi} \arctan(\sqrt{3}xy)$ la funzione definita su $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{C}$ la

curva data dall'eq. $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$. Oss. che

$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ è un insieme chiuso, poiché $\mathcal{C} = g^{-1}(\{0\})$

(g è continua e $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$). Inoltre $\mathcal{C}$ è un insieme limitato:

Infatti, da $|xy| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ segue

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq x^2 + xy + y^2 \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e quindi

$$\mathcal{C} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 1\} = \overline{B}_{\sqrt{2}}(\underline{0}).$$

Poiché f è una funzione continua (su $\mathbb{R}^2$) e $\mathcal{C}$ un insieme compatto, grazie al teorema di Weierstrass esistono dunque gli estremi assoluti di f

in $\mathcal{C}$. Oss. che $\nabla g(x,y) = (2x+y, x+2y) = \underline{0} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Poiché $(0,0) \notin \mathcal{C}$, possiamo asserire che tutti i pt. di $\mathcal{C}$ sono pt. regolari.

Possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange alla determinazione dei pt. stazionari di $f(x,y) = \frac{6}{\pi} \arctan(\sqrt{3}xy)$ su $\mathcal{C}$. Richiediamo direttamente che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} 0. \quad \text{Oss. che} \quad \det \begin{pmatrix} \frac{6}{\pi} \frac{\sqrt{3}y}{1+(\sqrt{3}xy)^2} & 2x+y \\ \frac{6}{\pi} \frac{\sqrt{3}x}{1+(\sqrt{3}xy)^2} & x+2y \end{pmatrix} = 0$$

(*) esprime la dipendenza lineare tra i due vettori ∇f e ∇g

$$\Leftrightarrow y(x+2y) - x(2x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow yx + 2y^2 - 2x^2 - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Dall'eq. del vincolo $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ si ottiene allora nel caso

$x=y$ i pt. $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; nel caso

$x=-y$ i pt. $(1, -1)$ e $(-1, 1)$.

Poiché $f(1, -1) = f(-1, 1) = \frac{6}{\pi} \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{6}{\pi} \arctan \sqrt{3} = -\frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = -2$

$$\text{e } f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{6}{\pi} \arctan(\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{6}{\pi} \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = 1,$$

possiamo concludere che

$$\underline{\underline{\min_{\mathcal{C}} f = -2}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{\max_{\mathcal{C}} f = 1.}}$$