A

COGNOME E NOME: ______________________

MATRICOLA: | | | | | | |

Lasciare vuote le tabelle seguenti.

Esercizio	1	2	3	4	5	6	7
Punti	2	3	3	3	3	3	3
Punti ottenuti							

Esercizio	8	9	10	11	12		**Totale**
Punti	4	4	2	3	3		36
Punti ottenuti							

1. (2 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) = 6\sin x + 3(x^2-1)\log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) - \alpha x \arctan x^2.$$

Allora $f(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$ se $\alpha =$ ______.

2. (3 punti) Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali.
Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.
   (a) $(a_n)_n$ è infinitesima per $n \to +\infty$ se e solo se $(\sin a_n)_n$ è infinitesima per $n \to +\infty$.
   ◯ Vera ◯ Falsa
   (b) $(a_n)_n$ è convergente se e solo se $(|a_n|)_n$ è convergente. ◯ Vera ◯ Falsa
   (c) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |a|$. ◯ Vera ◯ Falsa
   (d) Se $(a_n)_n$ è strettamente monotona e $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, allora la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(a-a_n)$ è convergente.
   ◯ Vera ◯ Falsa

3. (3 punti) Per ogni serie data, sia E_α l'insieme degli $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ per cui essa risulta convergente. Allora
   (a) per $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\log(\sqrt[3]{n}+1) - \log(\sqrt[3]{n})}{\sqrt[3]{n^\alpha + 4\alpha}}$ si ha $\inf E_\alpha =$______.
   (b) per $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^\alpha}\Big)^n$ si ha $\inf E_\alpha =$______.

4. (3 punti) Calcolate, usando la definizione, l'integrale improprio

$$B = \frac{2}{\pi}\int_0^{\log 2} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

dopo aver verificato che esso risulta convergente. Si ha $B =$______.

5. (3 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva. Sia

$$G(x) = \int_0^{x|x|} f(t)dt.$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se segue dalle ipotesi.

(a) $G(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$. ◯ Sì ◯ No

(b) G è strettamente crescente in $\mathbb{R}$. ◯ Sì ◯ No

(c) $x = 0$ è un punto con tangente orizzontale per G. ◯ Sì ◯ No

(d) $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$. ◯ Sì ◯ No

6. (3 punti) Per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sia

$$f_n(x) = x^n e^{-nx} \qquad \text{su } [0, +\infty[\,.$$

(a) Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ la funzione f_n ha il valore minimo assoluto in $x =$ ______ e il valore massimo assoluto in $x =$ ______.

(b) Se M_n denota il valore massimo assunto da f_n su $[0, +\infty[$, determinate la somma

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} M_n.$$

Si ha $S = a^{-1}$ con $a =$ ______.

7. (3 punti) Sia $\widehat{y}(x)$ l'unica funzione a valori reali definita su $]0, +\infty[$ che risolve l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 \sin x$$

e tale che $\widehat{y}(x) = o(x)$ per $x \to 0^+$.

Allora $\widehat{y}(\pi) =$ ______. Inoltre, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\widehat{y}(x)}{x^\alpha}$$

esiste finito ed è diverso da 0 se $\alpha =$ ______. Per tale valore di α il limite vale ______.

8. (4 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \sin x}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.

(a) f è continua in $(0,0)$, ma non è derivabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

(b) f è derivabile in $(0,0)$, ma non è continua in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

(c) f è derivabile in $(0,0)$ lungo tutte le direzioni. ◯ Vera ◯ Falsa

(d) f è differenziabile in $(0,0)$. ◯ Vera ◯ Falsa

9. (4 punti) Si consideri su $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(x,y) = x^3 + y^4 - 3x^2 - 8y^2$. Allora
   (a) f ha in (a,b) con $a =$ ______ e $b =$ ______ un punto di massimo locale stretto.
   (b) f ha in $(a,-2)$ con $a =$ ______ un punto di minimo locale stretto.
   (c) $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ con $\theta =$ ______ è la direzione lungo cui è massima la crescita di f nel punto $(1,2)$.

   Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa.
   Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Allora
   $f(A)$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. ◯ Vera ◯ Falsa
   f è uniformemente continua su A. ◯ Vera ◯ Falsa

10. (2 punti) Sia $\mathcal{C}$ la curva piana data dall'equazione
$$x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) + 2ye^{x-1} = 0$$
   e sia $P = (1,1)$ un punto su $\mathcal{C}$. L'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è
$$ax + by - 2 = 0,$$
   dove $a =$ ______ e $b =$ ______.
   Verificate che $\mathcal{C}$ coincide in un intorno del punto $(1,1)$ con il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $\varphi(1) = 1$. Il polinomio di Taylor di ordine 1 di φ centrato in $x_0 = 1$ risulta
$$P_{1,1}(x) = c + d(x-1)$$
   con $c =$ ______ e $d =$______.

11. (3 punti) Siano $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da
$$\mathbf{f}(t) = (2e^t, t, e^{2t}) \qquad g(x,y,z) = z^2 + zx - y.$$
   Allora si ha
   (a) $(g \circ \mathbf{f})'(0) =$ ______.
   (b) $\displaystyle\int_0^2 \|\mathbf{f}'(t)\|\, dt = ae^b + c$ con $a =$ ______, $b =$ ______ e $c =$ ______.
   (c) $\Delta g(1,1,2) =$ ______.

12. (3 punti) Sia f la funzione definita su $\mathbb{R}^2$ da $f(x,y) = \dfrac{6}{\pi} \arctan(\sqrt{3}xy)$ e sia $\mathcal{C}$ la curva data dall'equazione
$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0.$$
   Allora si ha $\min\limits_{\mathcal{C}} f =$ ______ e $\max\limits_{\mathcal{C}} f =$______.