Università di Trento – Dip. di Matematica
CdL in Matematica

Diario del Corso di Analisi Matematica A - a.a. 2021/22
Prof. Anneliese Defranceschi

MOD 2

01/03/22 (2 ore): Introduzione al secondo modulo: orario lezioni/esercitazioni, tutorato, sito web Programma del secondo modulo (in grandi linee).
Concetti base dello spazio vettoriale $\mathbf{R^n}$: vettori, rappresentazione grafica dei punti nel piano per n=2 (nello spazio per n=3). struttura di spazio vettoriale, la base canonica e varie scritture degli elementi di $\mathbf{R^n}$ ($\mathbf{R^2}$, $\mathbf{R^3}$). Lo spazio vettoriale $\mathbf{C^n}$.
Norme (spazi vettoriali normati). Es. in $\mathbf{R^n}$: $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ (norma euclidea o pitagorica). Es. in $C^0([a,b])$: $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ (norma euclidea o pitagorica). Es. $R([a,b])$ con $\|.\|_1$ non è uno spazio vettoriale normato.
Palla unitaria (chiusa/aperta) in uno spazio normato. E' un insieme convesso. Esempi: le palle unitarie in $\mathbf{R^2}$ relative alle norme $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$.
Nota 1Lez(2) Pag. 1-7, 1Lez(2)_Allegato

03/03/22 (2 ore): Elementi della palla unitaria in $(C^0([a,b]), \|.\|_\infty)$. Norme equivalenti.
Prodotti scalari (spazi vettoriali pre-hilbertiani; spazio vettoriale euclideo). Esempi. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza di Minkowski. Corollari: $(\mathbf{R^n}, \|.\|_2)$ e $(C^0([a,b]), \|.\|_2)$ risultano spazi normati. Angolo tra due vettori e vettori ortogonali. Vettori ortogonali e il "teorema di Pitagora". Identità del parallelogramma (tale identità caratterizza gli spazi vettoriali a prodotto scalare fra gli spazi vettoriali normati).
Lo spazio normato $(\mathbf{R^n}, \|.\|_p)$ per $1<p<+\infty$ (disuguaglianza di Hölder – vista ad Esercitazione13 MOD1 - disuguaglianza di Minkowski per la norma $\|.\|_p$ –non dim.). La norma $\|.\|_p$ non soddisfa l'identità del parallelogramma.
Tutte le norme $\|.\|_p$ per $1<p<+\infty$ in $\mathbf{R^n}$ sono fra loro equivalenti.
Distanze (spazi metrici). Sottospazio metrico. In ogni spazio vettoriale normato è definito in modo naturale una distanza: $d(x,y)=\|x-y\|$.
Esempi. Metrica discreta. Es. in $\mathbf{R^n}$: d_∞, d_1, d_2 (distanza euclidea o pitagorica); Es. in $C^0([a,b])$: d_∞ (metrica uniforme), d_1 (metrica integrale), d_2 (metrica lagrangiana). In $\mathbf{R^2}$ la metrica delle valli o del taxista.
Nota 2Lez(2) Pag. 8-19

08/03/22 (2 ore): Disuguaglianza di Minkowski per la norma $\|.\|_p$ (dim.) Intorni sferici e non in uno spazio metrico..
Metriche equivalenti in uno spazio metrico. Metriche equivalenti in $\mathbf{R^2}$. Significato delle distanze equivalenti (inclusione degli intorni sferici). Convergenza di una successione in uno spazio metrico.

Elementi base di topologia in $\mathbf{R^n}$.
Punti interni (insieme dei punti interni), punti esterni, punto di frontiera (l'insieme dei punti di frontiera). Punti di accumulazione, punto isolato.
L'insieme parte interna (o l'interno) e insieme frontiera per la palla aperta e per la palla chiusa in $\mathbf{R^n}$. Proprietà dell'insieme interno e dell'insieme frontiera.

Esempi.
Insiemi **aperti**, insiemi **chiusi**. Oss. L'**interno** (o la parte interna) di un insieme è un aperto, la frontiera è un insieme chiuso. Esempi.
Unione/intersezione di famiglie di aperti/chiusi.
Nota 3Lez(2) Pag. 20-31

10/03/22 (2 ore): Caratterizzazione degli insiemi chiusi di $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ (E è chiuso se e solo se il limite di ogni successione convergente in $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ appartiene a E).
Altre due caratterizzazioni degli insiemi chiusi di $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ (E è chiuso se e solo se contiene la sua frontiera; E è chiuso se e solo se contiene i suoi punti di accumulazione). La **chiusura** di E; alcune sue proprietà. Esempi. La chiusura di E è il più piccolo chiuso contenente E. La chiusura di E è uguale all'intersezione di tutti i chiusi contenenti E. Sottoinsiemi densi. Q è denso in **R**.
Oss: Ogni sottoinsieme di R che ammette un punto di accumulazione contiene infiniti elementi. Il viceversa non è vero.
Insiemi limitati in uno spazio metrico, in $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Diametro di un insieme.

*Complementi sulle successioni in **R** (in $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m}}$).*
Oss: Ogni successione convergente in R è limitata. Il viceversa non è vero.
Sottosuccesioni.
Nota 4Lez(2) Pag. 32-39 Nota 4Lez(2)_Allegato

15/03/22 (2 ore): Sottosuccessioni. Teorema: Una successione ammette limite l se e solo se ogni sua sottosuccessione ammette limite l. **Teorema di Bolzano-Weierstrass:** Ogni successione limitata in $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ ammette una sottosuccessione convergente (dim. metodo della bisezione). Corollario (sempre di Bolzano-Weierstrass): Ogni insiemi infinito e limitato ammette un punto di accumulazione. Esempi.
Teorema di Weierstrass: Ogni funzione continua su [a,b] ammette minimo e massimo (assoluti).
Teorema di Heine-Borel: Un sottoinsieme E di $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ è chiuso e limitato se e solo se ogni successione in E ammette una sottosuccessione convergente a un elemento di E. **Insiemi (seq.) compatti**. Esempi.

Successioni di Cauchy in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (in **R**).
Teorema (Criterio di convergenza di Cauchy): Una successione in R è convergente se e solo se è una successione di Cauchy . Vale anche in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$(con qualunque distanza/norma).
Spazi metrici completi. **R** è uno spazio metrico completo (lo è anche $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$). **Q** non è completo! (la successione (1+1/n)^n in **Q** è di Cauchy, ma il suo limite è in **R\Q.**
Nota 5Lez(2) Pag. 40-55

17/03/22 (2 ore): **Limite inferiore (minimo limite)** e **limite superiore (massimo limite)**. Essi esistono per ogni successione in **R**.
Teorema: Per ogni successione limitata $(x_n)_n$, il limite inferiore $\liminf x_n$ e il limite superiore $\limsup x_n$ sono finiti e $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.
Una caratterizzazione del limite inferiore e del limite superiore, se finiti. Esercizi.
Sottosuccessioni e limite inferiore e limite superiore. Teorema: $\liminf x_n$ e il $\limsup x_n$ sono risp. il più piccolo e il più grande limite sottosuccessionale di $(x_n)_n$ in **R** esteso (senza dim.) Teorema: Una successione $(x_n)_n$ è convergente a un limite l se e solo se $\liminf x_n = \limsup x_n$=l (senza dim.)

Funzioni da $\mathbf{R^n}$ in R. (Funzioni da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$ con m=1)

Generalità. Funzioni da $\mathbf{R^n}$ in **R** (funzioni di più variabili a valori reali (o scalari)): esempi; insieme di definizione. Rappresentazione grafica (n=2). Curve di livello (n=2). Insieme di livello (n=3; superfici) (solo accennato). Funzioni radiali. Esempi.
Funzione positiva/negativa/nulla; limitatezza superiore/inferiore; estremo superiore/inferiore; massimo/minimo; punti di massimo/minimo; punti di massimo locale/minimo locale. Esercizi.
Nota 6Lez(2) Pag. 56-75

22/03/22 (2 ore): Esercizio (segno, limitatezza, punti di max/min loc. per una funzione f da $\mathbf{R^2}$ in **R**).
Limiti e continuità *(Funzioni da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$ con $m\geq 1$)*
Ripasso dei concetti di limite e continuità per funzioni f da X, sottoinsieme di **R,** in **R**. Gli intorni in **R** esteso e la definizione unificata di limite.
Quale "limite" si riesce a "estendere" al caso di funzioni di più variabili (a valori vettoriali)?
Funzioni da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$ con $m\geq 1$: qualche esempio (successioni a valori in $\mathbf{R^m}$, curve, proiezione sulla sfera di raggio 1).
Definizione di *limite finito* per funzioni da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$. L'esistenza del limite **l** in $\mathbf{R^m}$ per **f** da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$ è equivalente all'esistenza del limite l_i per f_i da $\mathbf{R^n}$ in **R** per ogni i=1,...m (limiti per componenti). Unicità del limite e proprietà algebriche del limite (somma e prodotto per uno scalare). Limite di una funzione composta.
Continuità puntuale (globale) per funzioni **f** da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$ La continuità di **f** da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$ equivale alla continuità delle componenti.
La somma e la composizione di funzioni continue sono funzioni continue. Le funzioni proiezioni sono continue. Esempi di funzioni continue.
Calcolo del limite di due funzioni in due variabili a valori reali (nella forma indeterminata 0/0) usando la definizione. Verifica della continuità di f(x,y)=x(y-1) in (1,0) usando la definizione.
Limiti e limiti iterati
Nota 7Lez(2) Pag. 76-87

24/03/22 (2 ore): Limiti e limiti iterati. Continuità e continuità separata.
Limite delle restrizioni (per congetturare un limite; per dimostrare che un limite non esiste). Esercizi. Teorema ponte per funzioni da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$ (limite e limite per successioni; dim.). Esercizio. Corollario (continuità in un punto e 'continuità sequenziale').
Estensione di *limite finito su domini illimitati* per funzioni da $\mathbf{R^n}$ in $\mathbf{R^m}$
Estensione di *limite finito (+∞,-∞) per* $\boldsymbol{x}$ *tendente a* $\boldsymbol{x_0}$ *(su insiemi illimitati)* per funzioni da $\mathbf{R^n}$ in **R**. L'unione di $\mathbf{R^n}$ e $\{\infty\}$. *Definizione unificata di limite.*
Per funzioni da $\mathbf{R^n}$ in **R** valgono ancora i seguenti risultati riguardanti il limite: limitatezza locale; permanenza del segno; proprietà algebriche (somma, prodotto..); forme indeterminate; teorema del confronto.
Calcolo di limiti in due variabili. Uso delle coordinate polari nel calcolo di limiti in $\mathbf{R^2}$.
Nota 8Lez(2) Pag. 88-100

29/03/22 (2 ore): Ancora un esercizio sui limiti. Per funzioni da $\mathbf{R^n}$ in **R** valgono ancora i risultati riguardanti le funzioni continue. Estensione continua.

Teoremi generali per funzioni continue da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$:
Caratterizzazione globale della continuità per funzioni $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$: la controimmagine di ogni aperto (chiuso) in $\mathbf{R}^m$ è un aperto (chiuso) di $\mathbf{R}^n$.
Gli intorni (aperti, chiusi) in E, sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$. Topologia indotta.
Caratterizzazione globale della continuità per funzioni da E sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$.
Segmenti, (spezzate) poligonali in $\mathbf{R}^n$. Insiemi di $\mathbf{R}^n$ **connessi per poligonali.** Insiemi convessi a confronto.
Funzioni continue da A sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, con A connesso per poligonali: l'immagine f(A) è un intervallo; corollario: **teorema di esistenza degli zeri.**
Nota 9Lez(2) Pag. 101-111

31/03/22 (2 ore): Es. Esistenza degli zeri su un insieme conesso per poligonali.
Funzioni continue da K sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$, con K compatto: l'immagine f(K) è un insieme compatto.
Teorema di Weierstrass per funzioni continue definite su un compatto a valori in $\mathbf{R}$ e qualche applicazione.
Funzioni uniformemente continue. Esempi di funzioni u.c. e non. **Teorema di Heine-Cantor.** Funzioni lipschitziane e uniforme continuità.

Calcolo differenziale per funzioni da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$: introduzione 'poco ortodossa' al concetto di derivata parziale, derivata direzionale ...
Qualche esempio.
Nota 10Lez(2) Pag. 112-129

05/04/22 (2 ore): **Derivate direzionali** e **derivate parziali**. Funzione derivabile in $\mathbf{x_0}$ nella direzione $\mathbf{v}$. Funzione derivabile in $\mathbf{x_0}$ (in A). Significato geometrico delle derivate direzionali/derivate parziali. **Gradiente** (interpretazione direzione di massima crescita) Esercizi.
Regolarità: Derivate direzionali e continuità (la derivabilità lungo qualsiasi direzione non implica la continuità).
Differenziabilità equivalente a derivabilità per n=1.
Differenziabilità di f in $\mathbf{x_0}$ per $n \geq 2$. **Differenziale.**
Teorema: differenziabilità implica continuità, differenziabilità implica derivabilità in tutte le direzioni, vale la formula che lega la derivata direzionale al gradiente: $D_{\mathbf{v}}f(x)=< \nabla f\,(\mathbf{x}),\mathbf{v}>$ (dim.).
Nota 11Lez(2) Pag. 130-140

07/04/22 (2 ore): Direzioni di massima e minima crescita di una funzione differenziabile. Piano tangente ed interpretazione geometrica della differenziabilità. Vettore normale al grafico di f. Equazione parametrica della retta ortogonale al piano tangente al grafico di f in un punto (di differenziabilità). Esercizi.
Differenziale di somma, prodotto, quoziente.
Teorema del differenziale totale (cond. suff. per la differenziabilità) (dim.). Lo spazio vettoriale delle funzioni $C^0(A)$, con A sottoinsieme in $\mathbf{R}^n$. Lo spazio vettoriale delle funzioni $C^1(A)$, con A aperto in $\mathbf{R}^n$.
Oss: f in $C^1(A)$ implica f differenziabile in A (implica f continua in A e derivabile lungo ogni direzione).
Esercizi: studio della continuità, derivabilità, differenziabilità di funzioni in $\mathbf{R}^2$.
Nota 12Lez(2) Pag. 141-152

12/04/22 (2 ore): Es. studio della continuità, derivabilità, differenziabilità in $\mathbf{R}^2$ con parametro.

Teoremi generali per funzioni differenziabili da $\mathbf{R}^n$ in R.
Teorema di Rolle.
Teorema di derivazione per funzioni composte (**R** → $\mathbf{R}^n$ → **R**) (dim). Esercizi.
Teorema del valor medio o di Lagrange. Se una funzione ha differenziale nullo (gradiente nullo) in un insieme aperto, connesso per poligonali, allora essa è costante. (solo enunciato)
Nota 13Lez(2) Pag. 153-161

14/04/22 (2 ore): **Se una funzione ha differenziale nullo (gradiente nullo) in un insieme aperto, connesso per poligonali, allora essa è costante**. (dim.)
Integrali dipendenti da un parametro (funzioni definite mediante integrali): continuità e derivabilità (e formula di derivazione) della funzione integrale (dim. entrambe). Esercizio.
Derivate di ordine superiore (derivate parziali seconde pure e miste oppure derivate parziali di ordine 2 pure e miste). Derivate parziali di ordini superiori a 2: es. derivate parziali di ordine 3. Qualche esercizio.
Derivate parziali di ordine $|\alpha|$. Gli spazi vettoriali su **R** delle funzioni $C^k(A)$, $C^\infty(A)$ (A aperto in $\mathbf{R}^n$).
Teorema di Schwarz (per n=2; cond. suff. per l'inversione dell'ordine nelle derivate seconde miste) (solo enunciato) Estensioni a n-variabili; a ordini superiori. **Matrice hessiana** relativa a f (simmetrica se f in $C^2(A)$). Esempi.
Nota 14Lez(2) Pag. 162-171

19/04/22 (2 ore): **Teorema di Schwarz** (per n=2) (dim.). Esempio di funzione in $\mathbf{R}^2$, per la quale non vale lo scambio dell'ordine di derivazione.
L'operatore differenziale laplaciano. Funzioni armoniche. Esempi.
(Foglio Es_8_(2)_19-23_04: Insieme conico; funzione positivamente omogenea; teorema di Eulero).
Formula di Taylor di ordine n con il resto di Peano (con il resto di Lagrange) per una funzione in una variabile (in ipotesi più deboli di quanto visto nel MOD1).
Formula di Taylor di ordine n con il resto di Lagrange (di Peano) per una funzione di più variabili (dim. nel caso di una funzione di due variabili).
Nota 15Lez(2) Pag. 172-180

21/04/22 (2 ore): Vari commenti sulla formula di Taylor. Differenziale secondo e matrice hessiana.
Calcolo di un polinomio di Taylor (di ordine 2) usando la definizione e di un polinomio di Taylor (di ordine 3) usando lo sviluppo della funzione seno in 0.
Es: polinomio di Taylor; calcolo di un limite.
Ottimizzazione delle funzioni da $\mathbf{R}^n$ in **R**: **Estremi liberi.**
Punti di massimo e minimi locali (relativi)/globali (assoluti), stretti.
Cond. necessaria (del primo ordine) per un estremo locale interno di una funzione derivabile: punto critico (o stazionario) **(teorema di Fermat).**
Qualche esempio di punto critico/punto singolare/punto sul bordo che sono punti di estremo (locali/assoluti; stretti/non stretti).
Nota 16Lez(2) Pag. 181-191

23/04/22 (3 ore): Terza Prova Intermedia

26/04/22 (2 ore): Punti di sella. Esempi. Studio del segno di una funzione per la determinazione della natura di un suo punto critico.
Caso n=1: Cond. necessaria (del secondo ordine) per un punto estremo locale
Caso n=1: Cond. sufficiente (del secondo ordine) affinché un punto critico di una funzione di classe C^2 sia un punto di estremo (dim.).
Forme quadratiche (f.q. definite positive/negative, semi-definite positive/negative, indefinite).
Teorema: F. q. definita positiva: $\exists$ m>0 tale che $Q(\mathbf{h}) \geq m\|\mathbf{h}\|^2$ $\forall$ $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ (analogamente per le f. q. definite negative) (dim.)
Criteri per la classificazione delle f. q.:
i) caratterizzazione del segno delle f. q. attraverso il segno dei determinanti delle sottomatrici principali (=minori principali) della matrice associata;
ii) caratterizzazione del segno delle f. q. attraverso il segno degli autovalori della matrice associata.
Caso n>1: **Cond. nec. (del secondo ordine)** per un punto estremo locale. (dim.)
Nota 17Lez(2) Pag. 192-197
Nota 17Lez(2) Note Forme Quadratiche - Allegato Pag.1-6

28/04/22 (2 ore): Caso n>1: **Cond. suff. (del secondo ordine)** affinché un punto critico di una funzione di classe C^2 sia un punto di estremo. (dim.)
Caso n=2. Esercizi: ricerca di eventuali punti di min/max locali (globali):
f(x,y)=xye^{-(x^2+y^2)}; f(x,y)=|x|e^{-xy}; f(x,y)=(|x|+y) e^{-xy}; f(x,y)=x^2y-xy^2; f(x,y)=(y+x-x^2)log(x+y).
Caso n=3. Esercizi: ricerca di eventuali punti di min/max locali (globali):
f(x,y,z)=(x-y)^2+z^2+e^y-y.
Nota 18Lez(2) Pag. 198-209

02/05/22 (2 ore): Esercizi: ricerca di eventuali punti di min/max locali (globali).
Ripreso l'esercizio f(x,y)=(y+x-x^2)log(x+y).
Introduzione allo studio degli estremi vincolati di una funzione di due variabili sul bordo di un rettangolo (mediante la parametrizzazione del vincolo il problema si riduce alla ricerca degli estremi di una funzione di una sola variabile). Ricerca di eventuali punti di min/max locali (globali) su sottoinsiemi illimitati di $\mathbf{R}^2$.
Nota 19Lez(2) Pag. 210-220

03/05/22 (2 ore): Ricerca di eventuali punti di min/max locali (globali) su sottoinsiemi illimitati di $\mathbf{R}^2$, su insiemi non compatti. Metodo delle curve di livello.
Funzioni in più variabili a valori vettoriali.
L'esistenza del limite per funzioni vettoriali equivale all'esistenza del limite componente per componente.
La continuità per funzioni vettoriali equivale alla continuità componente per componente.
Esempi di funzioni vettoriali:
n=1, m>1: Curve in $\mathbf{R}^{\mathbf{m}}$. Esempi con m=2,3: Spirale di Archimede e spirale logaritmica (in generale curve polari).
Nota 20Lez(2) Pag. 221-234

05/05/22 (2 ore): Ancora qualche esempio di curve (curve cartesiane). Elica cilindrica.
Sostegno di una curva. Curva piana. Equazioni parametriche di una curva. Rappresentazione parametrica. Non confondere sostegno di una curva con il grafico di una curva!! Esempi.
Derivata di una curva. Vettore tangente ad una curva (in un punto regolare).

Curva di classe C^1, curva regolare (C^1 a tratti, regolare a tratti). equazione parametrica della retta tangente ad una curva (al sostegno della curva parametrica) in un punto (regolare). Esempio: curva cartesiana e curva polare. Esempio: elica cilindrica.
Esempi di funzioni vettoriali:
n, m>1: Trasformazioni di coordinate: **coordinate polari nel piano, coordinate sferiche nello spazio, coordinate cilindriche nello spazio.**
Nota 21Lez(2) Pag. 235-246

09/05/22 (2 ore): **Coordinate cilindriche nello spazio. Campi di vettori, superfici parametriche** (grafico di una funzione di due variabili; porzione di superficie sferica; porzione di superficie conica, superficie di rotazione [es. iperboloide iperbolico di rotazione].
Calcolo differenziale per funzioni da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$.
Funzioni differenziabili (la differenziabilità per funzioni vettoriali equivale alla differenziabilità componente per componente; quindi si possono sfruttare tutti i risultati legati alla differenziabilità per funzioni di più variabili a valori reali). La matrice jacobiana. La matrice jacobiana per le coordinate polari e le coordinate sferiche. Matrice jacobiana nxn e determinante jacobiano. Matrice jacobiana singolare. Il determinante della matrice jacobiana per le coordinate polari (n=2) e le coordinate sferiche (n=3). Differenziabilità della funzione composta di funzioni vettoriali.
Nota 22Lez(2) Pag. 247-256

10/05/22 (2 ore): Differenziabilità e continuità/esistenza delle derivate parziali. Le funzioni $C^k(A,\mathbf{R}^m)$. Teorema del differenziale totale e di Schwarz valgono anche nel caso vettoriale. Vale anche la formula di Taylor. Non vale più il teorema del valor medio (controesempio). Differenziabilità della funzione composta di funzioni vettoriali. Differenziale della funzione composta. La matrice jacobiana associata alla funzione composta. Esempi fondamentali!
Laplaciano in coordinate polari (in coordinate sferiche – non dim.). Equazione della retta tangente ad una curva di livello. Es. (ellisse, lemniscata di Bernoulli).
Nota 23Lez(2) Pag. 257-267

12/05/22 (2 ore): Ancora qualche esercizio di eq. retta tangente ad una curva di livello.
Equazione piano tangente ad una superficie di livello. Es: superficie toroidale.

Teorema della funzione implicita (o teorema del Dini) per funzioni di 2 variabili (condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità della funzione implicita; regolarità della funzione definita implicitamente). Vari commenti.
Es.1 (sviluppo di Taylor delle funzioni definite implicitamente; grafici di funzioni definite implicitamente). Lasciato come es. gli Es.2 e Es.3.
Nota 24Lez(2) Pag. 268-279

24/05/22 (2 ore): **Dim. del teorema del Dini per funzioni di 2 variabili.**
Estensioni del teorema del Dini:
A) **g(x,y,z)=0** (equazione in tre variabili);
Commenti sullo spazio tangente alla 'superficie di livello'.

$\mathbf{g(x_1,x_2,...,x_n,y)=0}$ (equazione in più variabili).
Esercizi. Commenti sugli esercizi in allegato.
Nota 25Lez(2) Pag. 280-289, Nota 25Lez(2) ESERCIZI Allegato

26/05/22 (2 ore): B) Sistema con due equazioni e 4 variabili .

$\mathbf{g_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=0}$

$\mathbf{g_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=0}$

(Teorema di Rouchè-Capelli per il caso lineare)

Caso generale: **sistemi di m equazioni di n+m variabili** (funzioni definite implicitamente da un sistema di equazioni).
Esercizi.
Nota 26Lez(2) Pag. 290-300

30/05/22 (2 ore): **Teorema di invertibilità locale/globale di funzioni da un intervallo I in R** (dim. usando i teoremi visti nel MOD1). Diffeomorfismi locali in un punto.
Teorema di invertibilità locale di funzioni da un intervallo I in R come applicazione del teorema del Dini per una funzione in due variabili.
Teorema di invertibilità locale di una funzione da un aperto di $\mathbf{R}^2$ a valori in $\mathbf{R}^2$ (come applicazione del teorema del Dini generale).
Esempi di non invertibilità globale.
Nota 27Lez(2) Pag. 301-310

31/05/22 (2 ore): **Estremi vincolati-Moltiplicatori di Lagrange.**
Casi già visti: ricerca del minimo/massimo assoluti (vincolati) di una funzione di due variabili sul bordo di un quadrato e su una circonferenza (mediante la parametrizzazione del vincolo il problema si riduce alla ricerca degli estremi di una funzione di una sola variabile). Metodo delle curve di livello.
Problema: trovare massimo/minimo assoluti per 'vincoli' più generali: nozione di **punto stazionario** (o critico) **di f(x,y) su M={g(x,y)=0} (di f(x,y,z) su M={g(x,y,z)=0}.**
Condizione necessaria per gli estremi di f su M (analogo al teorema di Fermat). **Caratterizzazione di un punto stazionario di f su M (teorema del moltiplicatore di Lagrange).** Funzione lagrangiana.
Esercizi.
Un caso più generale: ricerca di max/min assoluti di funzioni di 3 variabili con 2 vincoli.
Nota 28Lez(2) Pag. 311-325

11/06/22 (3 ore): Quarta Prova Intermedia