Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 10 - MOD2 : "Estremi liberi e non solo"

(2 - 6 maggio 2022)

10.1) Classificate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la forma quadratica $Q(\mathbf{h}) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da
$Q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 2\alpha h_1 h_2 + h_2^2 + 2\alpha h_2 h_3 + h_3^2\,.$

10.2) Determinate gli eventuali punti di minimo e massimo, locali e globali, delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione:

i) $x^2y + xy^2 - xy\,;$ ii) $x^4 + 3x^2y^2 + y^4\,;$

iii) $e^{x-y}(x^2 - 2y^2)\,;$ iv) $y + x\sin y\,.$

10.3) Determinate i punti di estremo locale (eventualmente globale) della funzione $f(x,y) = x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}$. Tracciate un grafico qualitativo di tale funzione.

10.4) Determinate i punti critici delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione, e determinate la loro natura:

i) $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{8}{x} - y\,;$ ii) $f(x,y) = xy\log(xy^2) + x^2y;$

iii) $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 + yz + z^3\,.$

10.5) Determinate gli eventuali punti di minimo e massimo, locali e globali, delle seguenti funzioni nel loro insieme di definizione:

i) $f(x,y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2\,;$ ii) $f(x,y) = x^4 + \alpha x^2 y + y^2\,,$ al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$;

iii) $f(x,y,z) = 3x^2 + \log(2+y^2)\log(2+z^2)\,.$

10.6) Sia $f(x,y) = y(2x^2 - 3y)e^{4x+y}$.

i) Determinate il segno di f.

ii) Determinate gli eventuali punti critici di f e la loro natura.

10.7) Determinate la natura dei punti critici di $f(x,y) = \alpha x^n + \beta y^n$ al variare di $n \geq 2$ ($\alpha\beta \neq 0$).

10.8) Sia $f(x,y) = e^{\frac{3}{2}x+y^2}(x - x^2 - y^2)$.

i) Determinate gli eventuali punti di massimo/minimo locale e globale della funzione f su $\mathbf{R}^2$.

ii) La funzione è limitata superiormente? Inferiormente?

iii) Esistono $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali gli insiemi di sopralivello $E_\alpha = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) \geq \alpha\}$ non sono limitati?

10.9) Determinate il punto del piano $2x+y-z-1=0$ che ha minima distanza dal punto $(1,0,-1)$ (suggerisco di usare per lo svolgimento dell'esercizio la funzione distanza al quadrato).

10.10) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^2((x+1)^2 - y^2)$.

i) Determinate il segno di f. Esiste $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)$?

ii) Determinate gli eventuali punti di minimo/massimo locale/globale di f su $\mathbf{R}^2$.

iii) Determinate i punti di minimo/massimo di f su $C = \overline{B_1(\mathbf{0})} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

10.11) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = 2xy(2-x-y)$. Determinate i punti di minimo/massimo di f su $T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2x+y \leq 4\}$.

10.12) Determinate massimo e minimo globale, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2}(-x+y)$$

nella striscia $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq 2\}$.