Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 11 - MOD2 : "Funzioni vettoriali: curve e non solo, matrice jacobiana, ..."

(9 - 13 maggio 2022)

11.1) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = \dfrac{x^2 - 4y^2}{x^2 + y^2}$.

i) Determinate il segno di f.

ii) Verificate se f può essere estesa con continuità in $(0, 0)$.

iii) Verificate che f è positivamente omogenea di grado 0.

iv) Sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ (x, y) \ne (0, 0)\}$. Provate che f è limitata su B e determinate $\inf_B f$ e $\sup_B f$ e dite se sono minimo e massimo, rispettivamente. Determinate gli eventuali punti di minimo e di massimo di f su B.

11.2) Sia f la funzione definita su $B_1(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x \sin y} & \text{se } (x,y) \in B_1(\mathbf{0}),\ x, y \ge 0 \\ -\sqrt{x \sin y} & \text{se } (x,y) \in B_1(\mathbf{0}),\ x, y \le 0 \\ 0 & \text{altrimenti in } B_1(\mathbf{0}). \end{cases}$$

i) Verificate che f è continua in $B_1(\mathbf{0})$.

ii) La funzione f è differenziabile in $(0, 0)$? Esistono le derivate direzionali $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ per ogni direzione $\mathbf{v}$? Vale lo stesso per la funzione f^2?

11.3) Determinate gli eventuali punti di estremo locale delle funzioni

$$f(x, y) = \sqrt{x - y^2}\,\log x\,; \qquad g(x, y) = \sqrt{|x - y^2|}\,\log x\,.$$

La funzione f ammette minimo assoluto? E la funzione g?

11.4) Sia $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ la curva $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ (spirale logaritmica). Determinate l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P = (1, 0)$ e rappresentatela graficamente.

11.5) Determinate la retta tangente alla curva polare $\rho = \theta$ (spirale di Archimede) nei punti di intersezione con la retta $x = 0$.

11.6) Calcolate $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$, $\|\mathbf{r}'(t)\|$ e $\|\mathbf{r}''(t)\|$ delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^3$ definita da

i) $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - \sqrt{6}t^2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$;

ii) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2(\sin t)\mathbf{j} + 2(1 - \cos t)\mathbf{k}$.

Date un'interpretazione fisica dei risultati ottenuti.

11.7) i) Sia $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$. Rappresentate graficamente la curva $\mathbf{r}(t) = (1 + t, t^2)$ con $t \in \mathbf{R}$ e il vettore tangente alla curva per $t = 1$.

ii) Sia $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$. Determinate l'equazione della retta tangente alla curva $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1, t + 1)$ nel punto $(-1, 1, 1)$.

11.8) Determinate una rappresentazione parametrica della curva $\mathcal{C}$ in $\mathbf{R}^3$ che si ottiene intersecando il cilindro $x^2 + y^2 = 4$ con il piano $x + z = 2$, e rappresentatela.

11.9) i) Rappresentate graficamente il sostegno delle seguenti curve:

a) $\mathbf{r} : [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^2 \qquad \mathbf{r}(t) = (-1 + 2\cos t)\mathbf{i} + (2 + 3\sin t)\mathbf{j}$;

b) $\mathbf{r} : [0, \pi] \to \mathbf{R}^3 \qquad \mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, 2t)$.

ii) Rappresentate graficamente il sostegno delle seguenti superfici parametriche:

a) $\mathbf{\Phi} : [0, 2] \times [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^3 \qquad \mathbf{\Phi}(t, \theta) = (\cos\theta, t, \sin\theta)$;

b) $\mathbf{\Phi} : [-2, 2] \times [0, 2\pi[\to \mathbf{R}^3 \qquad \mathbf{\Phi}(t, \theta) = (|t|\cos\theta, |t|\sin\theta, t)$;

c) $\mathbf{\Phi} : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}^3 \qquad \mathbf{\Phi}(\theta, \varphi) = (2\sin\varphi\cos\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 2\cos\varphi)$ (coordinate sferiche).

11.10) Sia $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ la curva definita da $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$. Verificate che per ogni $t \in]0, 2\pi[$ si ha

$$\mathbf{r}(2\pi) - \mathbf{r}(0) \neq 2\pi\mathbf{r}'(t)\,.$$

Osservate: Per le funzioni vettoriali **non** vale il teorema del valor medio (di Lagrange).

11.11) Siano $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ e $\mathbf{r} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ le funzioni definite da

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \qquad \mathbf{r}(t) = (\cos 2t, 2\sin 3t).$$

Calcolate $(f \circ \mathbf{r})'(t)$ per $t \in \mathbf{R}$.

11.12) Scrivete la matrice jacobiana delle seguenti funzioni vettoriali:

i) $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \qquad \mathbf{f}(x, y) = \arctan(2x + y)\mathbf{e_1} + \log(1 + x^2 + y^2)\mathbf{e_2}$;

ii) $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \qquad \mathbf{f}(x, y) = (ye^{x^2}, \sin(x + y), \cos(xy))$;

iii) $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \qquad \mathbf{f}(x, y, z) = (zx^2)\mathbf{i} + (4x^2 + e^y)\mathbf{j} + (z^3 - x)\mathbf{k}$;

iv) $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4 \qquad \mathbf{f}(x, y, z) = (z^2 + 1)\mathbf{e_1} + xyz\mathbf{e_2} + e^{x+yz}\mathbf{e_3} + \cos(x + y + z)\mathbf{e_4}$;

11.13) i) Rappresentate graficamente le curve di equazioni polari

a) $\rho = 2(1 - \cos\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$ (cardiode);

b) $\rho = \cos 3\theta$ (trifoglio);

ii) Date una rappresentazione parametrica delle curve in i).