Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 14 - MOD2:

"Invertibilità locale. Estremi vincolati: moltiplicatori di Lagrange e non solo"

(30 maggio - 3 giugno 2022)

14.1) i) Determinate per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (e^{x_1} + \alpha x_2, x_1 + e^{-\alpha x_2})$ verifica le ipotesi del teorema di invertibilità locale in qualsiasi punto di $\mathbf{R}^2$.

ii) Calcolate la matrice jacobiana della funzione inversa nel punto $(1, 1)$.

14.2) Sia $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 9\} \subseteq \mathbf{R}^2$. Verificate che la funzione $\mathbf{f} : A \to \mathbf{R}^2$ definita da $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$ è un diffeomorfismo locale in ogni punto di A. La funzione $\mathbf{f}$ è un diffeomorfismo in A?

14.3) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y) = xy$ soggetto al vincolo

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0.$$

14.4) Trovate i punti della curva $\mathcal{C}$ di equazione $x^4 + 4y^2 - 16 = 0$ di minima e di massima distanza dall'origine.

14.5) Determinate il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - \dfrac{2}{3}xy$ sull'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

14.6) Calcolate il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 - y$ sull'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4(x^2 + y^2) \leq 9, x + y \geq 0\}.$$

14.7) Calcolate il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x, y) = xy$ sull'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 - 2|x| \leq 0\}.$$

14.8) Sia $f(x, y) = y(x - 1)^2 - y^4$.

i) Determinate gli eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti della funzione f.

ii) Determinate il massimo e il minimo assoluti della funzione f sul quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.

14.9) Calcolate la distanza

i) del punto $(0, 0, 1)$ dal paraboloide ellittico di equazione $z = x^2 + 2y^2$;

ii) dell'origine dal grafico della funzione $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$.

14.10) Trovate i punti della curva intersezione delle superfici di equazione

$$xy + z^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

che sono più vicini all'origine.

14.11) Determinate il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y, z) = yz$ su $\mathcal{C}$ con

$$\mathcal{C} : \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = z^2. \end{cases}$$

14.12) Determinate il massimo e il minimo assoluti di $f(x, y, z) = x + 2y$ su $\mathcal{C}$ con

$$\mathcal{C} : \quad \begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ z - y + \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$$