Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 2 - MOD2 : "Topologia in $\mathbf{R}^n$ e non solo" (07 - 11 marzo 2022)

2.1) Dati due punti distinti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, diciamo retta per $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ l'insieme dei punti

$$\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \qquad \text{al variare di } t \in \mathbf{R}\,.$$

Verificate che i punti $\mathbf{x_1} = (-2, 0, 3, 1)$, $\mathbf{x_2} = (1, -1, 2, 0)$, $\mathbf{x_3} = (-5, 1, 4, 2)$ e $\mathbf{x_4} = (4, -2, 1, -1)$ sono *allineati,* cioè esiste una retta che li contiene.

2.2) Provate che le due norme in $\mathbf{R}^2$ definite da $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ e $\|\mathbf{x}\|_1 = |x| + |y|$, dove $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, non soddisfano l'identità del parallelogramma.

2.3) Un insieme $A \subseteq \mathbf{R}^m$ si dice *convesso* se per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ il segmento

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z}_t = t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y}, t \in [0, 1]\}$$

è contenuto in A.

a) Provate che l'intersezione di due insiemi convessi di $\mathbf{R}^m$ è un insieme convesso. L'unione di due convessi è necessariamente un convesso?

b) Data una successione $(C_n)_n$ di insiemi convessi in $\mathbf{R}^m$ con $C_n \subseteq C_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, provate che l'insieme $C = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n$ è un insieme convesso.

2.4) Provate che i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ sono convessi:

i) $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1, y \ge |x|\}$; ii) $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R} : y < \log x\}$.

2.5) Dimostrate che l'insieme $E = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}_{>0}\}$ è chiuso. Lo è anche togliendo un punto dell'insieme?

2.6) Sia $E \subseteq \mathbf{R}$ e sia x_0 un punto interno ad E. Stabilite per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o se è falsa.

i) $E \setminus \{x_0\}$ è chiuso.
ii) E è un intervallo aperto contenente x_0.
iii) Esiste $\delta > 0$ tale che $]x_0 - 2\delta, x_0 + \delta[\subseteq E$.

2.7) Sia $E = \bigcup_{n=3}^{+\infty} [-1 + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}]$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

i) E è chiuso.
ii) E è aperto.
iii) Nessuna delle affermazioni precedenti.

2.8) Provate che i sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ costituiti da un unico punto sono chiusi in $\mathbf{R}^n$.

2.9) Provate che l'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 > 1\}$ è aperto in $\mathbf{R}^2$.

2.10) Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$. Dimostrate che se E non ha punti isolati, allora anche $\overline{E} = E \cup \partial E$ non ha punti isolati.

2.11) Individuate l'interno e i punti di frontiera del seguente insieme

$$A_r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : r \le x^2 + y^2 < 1\} \qquad \text{al variare di } r \in [0, 1[\,.$$

2.12) a) Sia $\mathbf{x}_0 = (-2, 1, 2) \in \mathbf{R}^3$. Per quali valori di $r > 0$ l'insieme $B_1(\mathbf{0}) \setminus B_r(\mathbf{x}_0)$ è aperto?

b) Per quali punti $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ l'insieme $B_2(\mathbf{0}) \setminus B_1(\mathbf{x})$ è aperto?

2.13) In $\mathbf{R}^2$ sia $E_j = \overline{B}_j(\mathbf{x_j})$ con $\mathbf{x_j} = (j, 0)$ con $j \in \mathbf{N}_{\geq 1}$. L'insieme $E = (\bigcup_{j \in \mathbf{N}_{\geq 1}} E_j) \setminus \{(0,0)\}$ è aperto?

2.14) Siano fissati due vettori $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^2$. Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi

a) $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},\ \lambda \in]0, +\infty[\}$; b) $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},\ \mu,\ \lambda \in]0, +\infty[\}$;

c) $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \mathbf{x} = \mu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},\ \mu \in \mathbf{R}, \lambda \in]0, +\infty[\}$; d) $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 : \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0\}$

e stabilite così sono insiemi aperti, chiusi o ne aperti ne chiusi. Individuate i loro punti di accumulazione, la loro frontiera e la loro chiusura.

2.15) Sia $E \subseteq \mathbf{R}$ un insieme limitato superiormente e sia $\sup E \notin E$. Provate che allora $\sup E$ è un punto di accumulazione per E.

2.16) Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Siano $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ due successioni a valori in X e $(\alpha_n)_n$ una successione di numeri reali. Se $(x_n)_n$ converge a $x \in X$, $(y_n)_n$ converge a $y \in X$ e $(\alpha_n)_n$ converge a $\alpha \in \mathbf{R}$ provate che la successione $(x_n + y_n)_n$ converge a $x + y$ e la successione $(\alpha_n x_n)_n$ converge a αx.

2.17) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2\}$. Provate (usando la caratterizzazione sequenziale degli insiemi chiusi) che

i) A è un insieme chiuso e limitato; ii) B è un insieme chiuso e non limitato.