Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 3 - MOD2 : "Successioni a gogò e preliminari sulle funzioni reali di più variabili"

(14 - 18 marzo 2022)

3.1) Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false. Se l'affermazione è vera, dimostratela o indicate il risultato di cui è conseguenza; se è falsa costruite un controesempio. A e B sono sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ (per i controesempi basta prendere $n = 1$).

i) A (seq.) compatto, B chiuso $\implies$ $A \cap B$ (seq.) compatto;

ii) A aperto, B chiuso $\implies$ $A \cap B$ chiuso;

iii) A aperto, B aperto, $A \subseteq B$ $\implies$ $\partial A \subseteq B$;

iv) A aperto, B chiuso, $A \subseteq B$ $\implies$ $\partial A \subseteq B$;

v) A chiuso, B aperto, $A \subseteq B$ $\implies$ $\partial A \subseteq B$.

3.2) Provate che le seguenti successioni non verificano la condizione di Cauchy:

i) $(x_n)_n = \left(\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right)_n$ ii) $(s_n)_n$, dove $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\forall n \geq 1$.

3.3) Dite se le seguenti successioni sono limitate. Determinate il limite inferiore (= minimo limite) e il limite superiore (= massimo limite) delle seguenti successioni:

i) $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{3}$; ii) $x_n = (-1)^n \dfrac{n-1}{n+1}$; iii) $x_n = n \sin \dfrac{n\pi}{2}$;

iv) $0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, , \ldots$; v) $x_n = \left[\dfrac{n}{10}\right]$; vi) $x_n = \dfrac{n}{10} - \left[\dfrac{n}{10}\right]$.

3.4) Siano $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ due successioni di numeri reali limitate. Provate che

i) $$\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n \leq \liminf_{n\to+\infty} (x_n + y_n)$$

ii) $$\limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n .$$

Provate con degli esempi che le disuguaglianze in i) e in ii) possono essere strette.

3.5) Sia $(x_n)_n$ la successione di numeri reali positivi definita da $x_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$ Provate che

i) $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$, $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty$

ii) $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, $\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 2$.

Osservate che $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

NOTA (solo informativa) : Si dimostra che una qualsiasi successione $(x_n)_n$ di numeri reali positivi soddisfa queste disuguaglianze; esse possono essere anche strette come potete osservare nell'esempio.

3.6) Sia $(\mathbf{x}_n)_n$ una successione a valori in $\mathbf{R}^m$. Se $\mathbf{x}_n$ converge a $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^m$, allora ogni sua sottosuccessione converge a $\widehat{\mathbf{x}}$.

3.7) (Proprietà di Urysohn) Sia $(\mathbf{x}_n)_n$ una successione a valori in $\mathbf{R}^m$. Sia $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^m$ tale che

(*) ogni sottosuccessione di $(\mathbf{x}_n)_n$ ammette una sotto-sottosuccessione convergente a $\widehat{\mathbf{x}}$.

Provate che allora tutta la successione $(\mathbf{x}_n)_n$ converge a $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^m$ (si proceda per assurdo).

3.8) Determinate gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni e rappresentateli sul piano cartesiano:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\log(x^2-y^2)}$; ii) $f(x,y) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{(y+1)^2-x^2}}$; iii) $f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-1)$;

iv) $f(x,y) = \dfrac{\log(x\sqrt{y-x})}{xy-1}$; v) $f(x,y) = \dfrac{1+\sqrt{y(\sin x - 1))}}{\sqrt{y-x(x-4)}}$; vi) $f(x,y) = \arctan\sqrt{\dfrac{x+y}{2x+y}}$.

3.9) Individuate la controimmagine $f^{-1}(]-\infty,0])$ della funzione $f(x,y) = \log^2\bigl(\dfrac{x^2+y^2}{2xy}\bigr) + \arccos\bigl(\dfrac{(x^2+y^2)x^2}{y^2}\bigr)$.

3.10) Sia $f(x,y) = |x-y^2|$ la funzione definita su $\mathbf{R}^2$.
i) Determinate le curve di livello $E_c = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = c\}$ di f per $c \in \{-1,0,1,2\}$ e rappresentatele nel piano cartesiano.
ii) Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di f su $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 0\}$ ed eventualmente i punti di minimo e di massimo.
iii) Determinate, se esistono, il minimo e il massimo di f su $\overline{B}_{1,d_1}(\mathbf{0})$ ed eventualmente i punti di minimo e di massimo.

3.11) a) Determinate l'insieme di definizione (e rappresentatelo graficamente) delle seguenti funzioni

$$f(x) = \log(1-|x|)\,, \qquad g(x,y) = \log(1-|x|)\,, \qquad h(x,y,z) = \log(1-|x|)\,.$$

b) Sia $f(x,y) = e^{-x^2}$. Determinate $\inf\limits_{\mathbf{R}^2} f$ e $\sup\limits_{\mathbf{R}^2} f$. Se T è il triangolo (chiuso) di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$ e $(1,1)$ determinate il massimo (i punti di massimo) e il minimo (i punti di minimo) di f su T.