Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 4 - MOD2 : "Limiti e continuità per funzioni di più variabili (a valori reali/vettoriali)"

(21 - 25 marzo 2022)

4.1) Sia $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Provate, usando la definizione ε/δ (δ non necessariamente il migliore), la continuità nel punto (x_0, y_0) delle seguenti funzioni $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

i) $f(x, y) = x + y\,;$ ii) $f(x, y) = xy\,.$

4.2) Provate, usando la definizione ε/δ (δ non necessariamente il migliore), la continuità nel punto $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$ delle seguenti funzioni $f : \mathbf{R} \times]0, +\infty[\to \mathbf{R}$:

i) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}\,;$ ii) $f(x, y) = \dfrac{\sin x}{1 + y}\,.$

4.3) Sia $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ la funzione in due variabili a valori vettoriali definita da $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x + y, x - y)$.

i) Dite se $\mathbf{f}$ è limitata, rispettivamente in $\mathbf{R}^2$ e nel rettangolo $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 4, \quad 0 \le y \le 2\}$.

ii) Calcolate $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \mathbf{f}(x, y)\,.$

4.4) Calcolate il seguente limite, verificando poi il risultato ottenuto mediante la definizione di limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(2y + 1) + y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

4.5) Per ciascuno dei seguenti limiti stabilite se esiste, e nel caso affermativo, calcolatene il valore:

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,-1)} (\cos(xy) + e^y)\,;$ ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}\,;$ iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y^3}{x^2 + y^2}\,;$

iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x - y)}{\cos(x + y)}\,;$ v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(xy)}{x^2 + y^2}\,;$ vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - xy}{4x^2 - y^2}\,;$

vii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^4}\,;$ viii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^4 + y^4}\,;$ ix) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\,;$

x) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,;$ xi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2}\,;$ xii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x - 1)^2 + y^2}\,.$

4.6) Per ciascuno dei seguenti limiti stabilite se esiste, e nel caso affermativo, calcolatene il valore:

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4 + y^2}\,;$ ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x + y)}{x^2 + y^2} \sin(x + y)^2\,;$ iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y}\,.$

4.7) i) Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

stabilite se f è continua nel punto $(0, 0)$.

ii) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \le x \le 1\}$ e sia $g : D \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Stabilite se g è continua nel punto $(0, 0)$.

4.8) Sia $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ e sia $\mathbf{l} \in \mathbf{R}^m$. Provate che se $\mathbf{l} = \displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, allora $\|\mathbf{l}\| = \displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$. Verificate che l'implicazione inversa è vera se $\mathbf{l} = \mathbf{0}$.

È vera la seguente implicazione? Se esiste $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$, allora esiste $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

4.9) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$. È possibile estendere f con continuità in $(0,0)$?

4.10) Sia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dimostrate che se esiste $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(\frac{y}{x})$, allora g è costante.

4.11) Sia f definita da $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$. Determinate l'insieme di definizione di f e rappresentate graficamente alcune curve di livello di f (può essere utile l'uso delle coordinate polari).

Stabilite se esiste il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

4.12) Verificate che la funzione $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+xy}$ è definita su tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

i) La funzione f è limitata?

ii) Esistono i seguenti limiti?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,; \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)\,; \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)\,,$$

nei casi in cui $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\,,\ \ 0 < y \le x^2\}$ e $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0,\ \ |y| \le x^2\}$.

4.13) Per ciascuno dei seguenti limiti stabilite se esiste, e nel caso affermativo, calcolatene il valore:

i) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \frac{\log x}{\log y}\,, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < ax < 1,\ \ bx < y < ax\}, \qquad 0 < b < 1 < a$ fissati;

ii) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \frac{x}{x+y}\,, \qquad A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < y < 1,\ \ \frac{\sqrt{y}}{2} < x < \sqrt{y}\}$.

4.14) Determinate tutti i valori del parametro reale $\alpha > 0$ per i quali la funzione $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \dfrac{x^2|y|^\alpha}{x^4+y^2}$ è estendibile con continuità a tutto $\mathbf{R}^2$.