Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 5 - MOD2 : "Funzioni continue - Funzioni uniformemente continue ... e non solo"

(28 marzo - 1 aprile 2022)

5.1) Stabilite se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$ sono o non sono aperti, chiusi, limitati, connessi per poligonali:

i) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : xyz = 0\}$; ii) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 < 1\}$;

iii) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 4x^2 + 16z^2 = 16\}$; iv) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 4x^2 + 16z^2 \geq 16\}$.

5.2) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ -1 & \text{se } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

e $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) > 0\}$.

i) L'insieme E è aperto? È chiuso?

ii) La funzione f è continua?

5.3) Sia $\alpha \in]0,1]$. Una funzione $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ si dice *hölderiana di ordine* α in $]a,b[$ se esiste $L > 0$ tale che per ogni $x, y \in]a,b[$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^\alpha.$$

Se $\alpha = 1$ la funzione f si dice anche *lipschitziana* (definizioni analoghe si ottengono per funzioni di più variabili a valori vettoriali).

i) Provate che ogni funzione hölderiana di ordine α in $]a,b[$ è uniformemente continua in $]a,b[$.

ii) Provate che la funzione $\sqrt{x} : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ è hölderiana di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ con $L = 1$. Deducete quindi che è uniformemente continua su $[0,+\infty[$.

5.4) Siano $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ e $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. Sia f una funzione uniformemente continua sull'intervallo $]a,b]$ e sull'intervallo $[b,c[$. Provate che allora f è uniformemente continua su $]a,c[$.

5.5) *Cond. suff. per l'uniforme continuità su insiemi non compatti*

i) Sia $f : [a,+\infty[\to \mathbf{R}$ una funzione continua. Se f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, allora f è uniformemente continua su $[a,+\infty[$.

ii) Vale anche il viceversa?

iii) La funzione $f(x) = x\sin(\dfrac{1}{x})$ è uniformemente continua su $[1,+\infty[$?

5.6) *Cond. suff. per l'uniforme continuità su insiemi non compatti*

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ esiste finito. Provate che f è uniformemente continua su $\mathbf{R}$.

5.7) *Cond. suff. per l'uniforme continuità su insiemi non compatti*

i) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile con derivata limitata. Provate che f è uniformemente continua.

ii) Vale anche il viceversa?

5.8) La funzione $f :]0,1] \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = \log x$ è uniformemente continua su $]0,1]$? E la funzione $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$?

5.9) i) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$. Provate che i due limiti

(*) $\displaystyle\lim_{y\to0}\big(\lim_{x\to0} f(x,y)\big)$; $\displaystyle\lim_{x\to0}\big(\lim_{y\to0} f(x,y)\big)$

esistono e sono uguali, ma che non esiste

(**) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

ii) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x} + x\sin\dfrac{1}{y} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ oppure } y = 0. \end{cases}$

Provate che esiste il limite in (**) ma non esistono i limiti in (*).

5.10) Sia $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|x|(1-x)}} \log(4-x^2-y^2)$. Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ il suo insieme di definizione. Dopo aver determinato il segno della funzione f in $(\frac{1}{2}, 0)$ e in $(-\frac{7}{4}, 0)$, dite se è applicabile il teorema di esistenza degli zeri.

5.11) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1, \quad 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$. Provate che esiste in A una soluzione dell'equazione $-x^2 + \dfrac{\sin y}{1+x^2+y^2} = 0$.

5.12) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

i) Stabilite se f è continua in $\mathbf{R}^2$.
ii) Dite se f è uniformemente continua su $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \le 2x \le 1\}$.

5.13) *Cond. suff. per l'esistenza di un minimo su insiemi non compatti* (Teorema di Weierstrass generalizzato, vedi Es. 6.12, MOD1)

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continua tale che

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty.$$

Allora f ammette minimo su $\mathbf{R}^n$, cioè esiste $\mathbf{x_0} \in \mathbf{R}^n$ tale che $f(\mathbf{x_0}) = \min_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{x})$.

5.14) Calcolate le derivate parziali prime, dove esistono, delle funzioni:

$$\frac{\arctan \frac{x}{y}}{x^2+y^2}; \qquad \log(1+\cos(xy)); \qquad \sqrt{x^2+e^{3yx^2}}; \qquad \int_0^{x^2+y^2} \frac{\sin t}{1+e^t} dt.$$

5.15) Calcolate le derivate parziali prime, dove esistono, della funzione $f(x,y,z) = (x^2z^2+y^2)\log(z^2y-x)$.

5.16) In quali punti di $\mathbf{R}^2$ le funzioni $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ e $g(x,y) = |xy|$ ammettono derivate parziali prime?