Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 6 - MOD2 : "Derivate direzionali, derivate parziali, differenziabilità"

(04 - 08 aprile 2022)

6.1) Sia $C \subset \mathbf{R}^n$ un convesso chiuso. Sia $\widehat{x} \in \mathbf{R}^n \setminus C$. Provate che $\mathbf{x_0} \in C$ è la proiezione $P_C\widehat{\mathbf{x}}$ (proiezione di $\widehat{\mathbf{x}}$ su C o punto di C di minima distanza da $\widehat{x}$ - vedi 10Lez. 31/03 pag.115) se e solo se

$$(*) \qquad \langle \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x_0}, \mathbf{x} - \mathbf{x_0} \rangle \leq 0 \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in C\,.$$

Ricordiamo che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$. Interpretate geometricamente la condizione (*). Provate che nel caso che C sia un sottospazio di $\mathbf{R}^n$, la condizione (*) è equivalente a

$$\langle \widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x_0}, \mathbf{x} \rangle = 0 \qquad \text{per ogni } \mathbf{x} \in C\,.$$

6.2) Sia $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x+y}}{x^2+y^2}$. f è estendibile con continuità in $(0,0)$? Calcolate, se esiste, $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y)\,.$

6.3) Calcolate la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ per ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ delle seguenti funzioni:

i) $f(x,y) = x^2 - xy$; ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,; \end{cases}$

iii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,; \end{cases}$ iv) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}\,.$

Che cosa si può dire della continuità in $\mathbf{R}^2$ delle funzioni in i)-iv)?

6.4) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y,z) = |x+y+z|$. Se $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$ è tale che $x_0 + y_0 + z_0 = 0$, determinate le direzioni $\mathbf{v}$ in cui la derivata direzionale di f in $\mathbf{x_0}$ esiste.

6.5) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \sqrt{|xy|}\sin\sqrt{x^2+y^2}$.

i) Calcolate $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ per ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$.

ii) Calcolate, se esiste, $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y)\,.$

6.6) Calcolate le derivate parziali, dove esistono, delle funzioni:

i) $f(x,y) = (x+y^2)\log(x-y)$; ii) $f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } y = 0. \end{cases}$

6.7) Calcolate il gradiente di f nel punto $\mathbf{p}$ indicato a fianco:

i) $f(x,y) = \sin x \cos y$ $\quad \mathbf{p} = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$; ii) $f(x,y,z) = \log \dfrac{xy}{z}$ $\quad \mathbf{p} = (1,1,2)$.

6.8) Stabilite se la funzione f, definita nei casi di seguito elencati, è differenziabile nell'origine:

i) $\sqrt{|xy|}$; ii) $(y-x)\sqrt{x^2+y^2}$ iii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

6.9) Calcolate la derivata direzionale (se il vettore dato non ha modulo unitario, va normalizzato).:

i) di $x^2 \log(x^2+y^2)$ nel punto $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ e nella direzione del vettore $\sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$;

ii) di $2x - 3\sqrt{2x^2+y}$ nel punto $(0,3)$ e nella direzione del vettore $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$;

iii) di $x^2 - xz + xy^2$ nel punto $(-1,2,0)$ e nella direzione del vettore $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

6.10) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = |y| \sin(x^2+y^2)$. Stabilite in quali punti di $\mathbf{R}^2$ la funzione f ammette le derivate parziali.

6.11) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = y^4 e^{3x}$. Determinate per quale versore $\mathbf{v}$, la derivata $D_{\mathbf{v}} f(0,-1)$ è massima e per quale è nulla.

6.12) Qual è la direzione $\mathbf{v} = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}$ in cui è massima la rapidità di variazione della funzione $f(x,y) = x^2 + \sqrt{3} y^2$ nel punto $(1,1)$?

6.13) Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$ Verificate che il piano di equazione $z = 0$ non è il piano tangente al grafico della funzione f in $(\mathbf{0}, f(\mathbf{0}))$.

6.14) Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni:

i) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^3 y^2}$ nel punto $(2,1,f(2,1))$; ii) $f(x,y) = \dfrac{\log(x^2+y)}{y^2 - 3x}$ nel punto $(2,-3,f(2,-3))$.

6.15) Determinate i punti dei grafici delle seguenti funzioni in cui il piano tangente è orizzontale:
i) $x^3 y^2 (6 - x - y)$; ii) $x^2 y e^{x+y}$.

6.16) Tracciate un grafico approssimativo delle seguenti funzioni (nei loro insiemi di definizione) e trovate le equazioni del piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

i) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$; ii) $f(x,y) = \sqrt{1 - 2x^2 - 4y^2}$.

6.17) Studiate, in funzione del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, l'esistenza delle derivate parziali e la differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y,z) = \begin{cases} z^4 \dfrac{(x^2+y^2)^\alpha}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,z) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,z). \end{cases}$$