Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 7 - MOD2 : "Differenziazione, piani tangenti, rette normali,..."
(11 - 15 aprile 2022)

7.1) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, la continuità, la derivabilità lungo ogni direzione $\mathbf{v}$ e la differenziabilità della funzione f nell'origine.

7.2) Dite se sono differenziabili in $\mathbf{R}^2$ le seguenti funzioni:

i) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$; ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

7.3) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^3+y^3} & \text{se } x \neq -y \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Studiate la continuità di f in $\mathbf{R}^2$. f è limitata? Per $n = 1, 2$ sia

$$Q_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ |x - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{3n(n+1)}, \ \ |y| \leq \frac{1}{3n(n+1)}\}.$$

f è uniformemente continua su $Q_1 \cup Q_2$?

7.4) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x + |y|$.

i) Rappresentate nel piano cartesiano xy alcune curve di livello della funzione f.

ii) Studiate in $\mathbf{R}^2$ la continuità, la derivabilità lungo ogni direzione $\mathbf{v}$ e la differenziabilità di f.

iii) Trovate il massimo e il minimo di f su $\overline{B}_{1,d_1}(\mathbf{0})$.

7.5) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ che si annulla in $(0,0)$ e vale

$$f(x,y) = \sin(x+y^2)\log(x^2+y^2)$$

se $(x,y) \neq (0,0)$. La funzione f è continua? È differenziabile in $(0,0)$? Lungo quali direzioni $\mathbf{v}$ esiste $D_{\mathbf{v}}(0,0)$?

7.6) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Provate che f è differenziabile nel punto $(0,0)$, ma non soddisfa in $(0,0)$ le ipotesi del teorema del differenziale totale (ossia, $f \notin C^1(\mathbf{R}^2)$ - Ricordate che il teorema del differenziale totale dà condizioni *sufficienti*, ma non necessarie, per la differenziabilità di una funzione in un punto).

7.7) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Verificate che f nel punto $(0,0)$
i) è continua.
ii) è derivabile lungo ogni direzione $\mathbf{v}$.
iii) verifica la formula $D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), \mathbf{v} \rangle$ per ogni versore $\mathbf{v}$.
iv) **non** è differenziabile.
(Ricordate che il teorema a pag. 139 (11Lez(2). 05/04) esprime condizioni soltanto *necessarie*, ma non sufficienti, per la differenziabilità di una funzione in un punto)

7.8) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione continua in $(0,0)$ e tale che esistono $M > 0$ e $r > 0$ tali che

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq M, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq M \qquad \text{per ogni } (x,y) \in B_r(\mathbf{0}).$$

Supposto che f sia differenziabile su $B_r(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, provate che f è lipschitziana in $(0,0)$.

7.9) Sia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua e dispari. Sia $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)dt$ per $x, y \in \mathbf{R}$.

i) Provate che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $f(x,-x) = f(-x,x)$ e $f(x,-x) = 0$.

ii) Provate che per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$, il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, -x_0, f(-x_0, x_0))$ passa per l'origine.

7.10) Determinate i punti del grafico della funzione $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$ in cui il piano tangente è normale a $(1,2,1)$.

7.11) Determinate i punti del grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ in cui il piano tangente è ortogonale alla retta di equazioni

$$x = \tfrac{1}{2}t, \quad y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}t, \quad z = \tfrac{1}{2}t.$$

7.12) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$ e $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = \sin(\alpha x + y^2)$.

i) Determinate per quale valore di $\alpha \in \mathbf{R}$ il piano tangente al grafico di f nel punto $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ è parallelo alla retta $x = y = 2z$.

ii) Esistono valori di α per cui è perpendicolare?

7.13) i) Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
ii) Determinate in quali punti il piano tangente è ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (1,1,1)$.
iii) Determinate in quali punti il piano tangente è parallelo alla retta $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0. \end{cases}$