Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2021–2022

Esercizi paradigma 10: "...il mondo enigmatico delle serie ..."
(15 - 19 novembre 2021)

10.1) Calcolate la somma delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) ; \qquad \text{ii)} \sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) .$$

10.2) Provate che $0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\frac{\pi}{2^n} < 2\pi$.

10.3) Utilizzando il criterio del confronto asintotico stabilite per quali valori dei parametri le seguenti serie sono convergenti:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + n^\alpha}{n^3 + n^{2\alpha}} \quad \alpha \in \mathbb{R} ; \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + n^\beta}{n^3 + n^{\beta+1}} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

10.4) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n\sqrt{\log n}} ; \qquad \text{ii)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}} .$$

10.5) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{n+3} ; \qquad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{n^2+1} .$$

10.6) Determinate, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n (\arctan x)^n}{(n + \sin n)\pi^n} .$$

10.7) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n\sqrt{n}+1)2^n} ; \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^{2n^2}}{n^2} x^n ; \qquad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n + \sqrt[3]{n}} .$$

10.8) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie (serie di potenze e serie riconducibili a serie di potenze):

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} ; \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n x^n ; \qquad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{(2x)^n}{n} ; \qquad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{(4n+1)!} x^n ;$$

$$\text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n ; \qquad \text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4} (x-3)^n ; \qquad \text{vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (2 - \log x)^n ;$$

$$\text{viii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1} x^n ; \qquad \text{ix)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n ; \qquad \text{x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{4^n+1} \left(\frac{x+2}{x^2-2x+3}\right)^n .$$

10.9) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie (riconducibili a serie di potenze):

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n(\log n^2)} ; \qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n (\log x)^n ; \qquad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^n + \pi^n) x^{2n} .$$

10.10) Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali non negativi. Provate allora che si ha

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ converge ;

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge ;

iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ converge .

10.11) Dimostrate che se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n+1} - a_n|$ è convergente. Provate con un esempio che l'implicazione non è vera se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge solo semplicemente.

10.12) Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali non negativi e decrescente.

a) Provate che se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

b) Provate con un esempio che l'implicazione inversa in a) non è vera.