

Esercizi paradigma 11 : “...il mondo delle primitive - integrali e la funzione integrale ...”
(22 - 26 novembre 2021)

Qui in seguito sono proposti alcuni esercizi (raccolti per tipologia) su questi argomenti. Potete trovare ulteriori esercizi sul sito dell'a.a. 2014/15 in materiale didattico Esercizi-9-09-12

11.1) a) Determinate per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ risulta derivabile su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x (e^{-t^2} + t) dt & \text{se } x > 0 \\ a^2 \sin x + b & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

b) Calcolate il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} \int_0^{\log^2(1+2x)} \sqrt[3]{1+t^2} dt.$$

11.2) i) Provate che la funzione $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + 2\log\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4+x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ su $\mathbb{R}$.

ii) Calcolate $\int_0^1 f(x) dx$.

iii) Calcolate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 2x}{x^3}$.

11.3) Usando la tabella delle primitive elementari (o quasi immediate), determinate le primitive delle seguenti funzioni:

$$\text{i) } f(x) = \cos 3x + e^{-2x}; \quad \text{ii) } f(x) = \frac{(\log x)^3}{x} - x2^{x^2}; \quad \text{iii) } f(x) = \frac{1}{1+4x^2} + \frac{2}{1-x}.$$

11.4) Calcolate i seguenti integrali quasi immediati:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - \log^2 x}{2x} dx; \quad \int \frac{x}{x^2+1} dx; \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx; \quad \int \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} dx; \quad \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx.$$

11.5) Calcolate i seguenti integrali immediati:

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 2x + e}{x} dx; \quad \int_0^2 \frac{9^x - 1}{3^x + 1} dx; \quad \int_{-1}^4 |x^2 - 2x| dx; \quad \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx.$$

11.6) Calcolate per parti i seguenti integrali:

$$\int x \arcsin x dx; \quad \int x^4 \log 2x dx; \quad \int (2x+1)^2 e^x dx; \quad \int x^3 e^{-x} dx; \quad \int \log(1+x^2) dx.$$

11.7) Calcolate i seguenti integrali usando delle sostituzioni opportune (e integrando eventualmente poi funzioni razionali oppure per parti):

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} dx; \quad \int \sqrt{4-x^2} dx; \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx; \quad \int \frac{1}{\cos x} dx; \quad \int \sqrt{2+x^2} dx.$$

11.8) i) Studiate brevemente la funzione $f(x) = -xe^{x^2} + e$ e tracciate un suo grafico qualitativo. Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $x = 0$ e $y = 0$.

ii) Al variare del parametro $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, rappresentate nel piano cartesiano la regione piana

$$A(\alpha) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \log \frac{2x}{\pi} \leq y \leq \cos x\}.$$

Determinate la sua area e calcolate $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} A(\alpha)$.

11.9) i) Calcolate il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{x^2} \sqrt{1-t^2} dt + 2x - x^2}{x^3}.$$

ii) Determinate l'ordine d'infinitesimo e la parte principale, per $x \rightarrow 0$, dell'infinitesimo

$$f(x) = \sin x - \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

11.10) a) i) (cambio di scala) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, e sia $\lambda > 0$. Sia $f : [\lambda a, \lambda b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile. Giustificate la formula

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x) dx = \int_a^b f(\lambda x) dx.$$

ii) Interpretate graficamente mediante una funzione f continua e positiva su $[0, 2]$ la formula

$$\frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(2x) dx.$$

b) (invarianza per traslazione) i) Siano $a, b, \tau \in \mathbb{R}$. Sia $f : [a + \tau, b + \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile. Giustificate la formula

$$\int_{a+\tau}^{b+\tau} f(x) dx = \int_a^b f(x + \tau) dx.$$

ii) Interpretate graficamente mediante una funzione f continua e positiva su $[2, 3]$ la formula

$$\int_2^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x + 3) dx.$$

c) (invarianza per riflessione) i) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Sia $f : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile. Giustificate la formula

$$\int_{-b}^{-a} f(x) dx = \int_a^b f(-x) dx.$$

ii) Interpretate graficamente mediante una funzione f continua e positiva su $[-3, -2]$ la formula

$$\int_{-3}^{-2} f(x) dx = \int_2^3 f(-x) dx.$$

d) (simmetria) Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e sia $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile. Allora

i) se f è dispari, vale $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

ii) se f è pari, vale $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

11.11) Sia $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-2, 0] \\ 3|x-1| - 3 & \text{se } x \in]0, 2] \\ -1 & \text{se } x \in]2, 3]. \end{cases}$$

Studiate la funzione integrale $F : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ indicando in quali punti la funzione F non è derivabile e rappresentatela nel piano cartesiano.

11.12) Sia $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{2^{x^2-1}(1 - \cos \sqrt{x})}{\log(1+x) \arctan \sqrt{x^3}}$.

i) Provate che $f(x) \sim \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ per $x \rightarrow 0^+$.

ii) Calcolate $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}} f(x) dx$.

iii) Trovate due successioni infinitesime $(a_n)_n$ di numeri reali positivi tali che i rispettivi limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n} + a_n} f(x) dx$$

risultino 0 e $+\infty$.

11.13) Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ e sia $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la

funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Studiate la monotonia e la convessità della funzione F . La funzione F è iniettiva? È suriettiva?

11.14) Sia $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Provate che

$$\sup_{a \leq x_1 < x_2 \leq b} |u(x_1) - u(x_2)| \leq \int_a^b |u'(x)| dx.$$