Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 12 - MOD2 : "Matrice jacobiana, operatori differenziali, curve, teorema del Dini ..."

(9 - 13 maggio 2022)

12.1) Sia $u(x,y) \in C^1(\mathbf{R}^2)$ e sia $\widetilde{u} :]0,+\infty[\times[0,2\pi] \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $\widetilde{u}(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

i) Provate che

$$\nabla u(x,y)\big|_{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} = \big((\cos\theta)\widetilde{u}_\rho(\rho,\theta) - \frac{\sin\theta}{\rho}\widetilde{u}_\theta(\rho,\theta)\big)\mathbf{e_1} + \big((\sin\theta)\widetilde{u}_\rho(\rho,\theta) + \frac{\cos\theta}{\rho}\widetilde{u}_\theta(\rho,\theta)\big)\mathbf{e_2},$$

dove $\widetilde{u}_\rho$ e $\widetilde{u}_\theta$ indicano le derivate parziali di $\widetilde{u}$ rispetto a ρ e θ, rispettivamente.

ii) Verificate che $\|\nabla u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\|^2 = (\widetilde{u}_\rho(\rho,\theta))^2 + \frac{1}{\rho^2}(\widetilde{u}_\theta(\rho,\theta))^2 \qquad \forall\rho > 0,\ \forall\theta \in [0,2\pi]$.

12.2) Sia $A \subseteq \mathbf{R}^3$ un insieme aperto. Sono definiti due operatori differenziali, l'operatore **divergenza** e l'operatore **rotore**, su campi vettoriali $\mathbf{f} : A \to \mathbf{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^1(A, \mathbf{R}^3)$ come segue:

$$\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \qquad \in \mathbf{R};$$

$$\text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}))\mathbf{e_1} + (\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}))\mathbf{e_2} + (\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}))\mathbf{e_3} \quad \in \mathbf{R}^3 .$$

Verificate che per ogni $u \in C^2(A)$ vale

i) $\quad \text{div}(\nabla u) = \Delta u \quad$ su A; ricordate che Δ indica il laplaciano;

ii) $\quad \text{rot}(\nabla u) = \mathbf{0} \quad$ su A.

Verificate che per ogni $\mathbf{u} \in C^2(A, \mathbf{R}^3)$ vale

iii) $\quad \text{div}(\text{rot } \mathbf{u}) = 0 \quad$ su A.

(Oss. Tali operatori si trovano, per es., nelle equazioni di Maxwell che costituiscono le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo con $\mathbf{f}$ il campo elettrico o il campo magnetico, e non solo; nelle equazioni che descrivono fenomeni legati alla fluidodinamica, dove tipicamente $\mathbf{f}$ rappresenta il vettore velocità di un fluido in ogni punto).

12.3) Determinate la divergenza e il rotore dei seguenti campi vettoriali da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$:

i) $\mathbf{f}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$; $\qquad$ ii) $\mathbf{f}(x,y,z) = (x^2 + yz, xyz, x + zy^2)$;

iii) $\mathbf{f}(x,y,z) = (x\cos z, y\sin x, z\cos y)$.

12.4) Scrivete la matrice jacobiana della funzione vettoriale $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (z + \sin(4x - y^2), \log(1 + x^2 + z^2), \tfrac{1}{2}yz^2).$$

Considerate poi la funzione $\mathbf{h}(t) = (\mathbf{f} \circ \mathbf{r})(t)$ con

$$\mathbf{r}(t) = (t, -2t^2, t+1) \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolate $\mathbf{h}'(1)$.

12.5) Scrivete la matrice jacobiana della funzione vettoriale $\mathbf{h} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ definita da $\mathbf{h}(x,y) = (\mathbf{r} \circ f)(x,y)$, dove $f(x,y) = x^2 + xy$ per $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ e $\mathbf{r}(t) = (t, 2t^2, t^3, t)$ per $t \in \mathbf{R}$.

12.6) Sia $g(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$.

i) Determinate l'insieme di definizione della funzione g.

ii) Rappresentate graficamente nel piano xy alcune curve di livello $g(x,y) = c$, al variare di $c > 0$ (usate le coordinate polari).

iii) Esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$?

iv) Determinate l'equazione della retta tangente alla curva di livello $g(x,y) = 2$ nel punto $(0,2)$. Rappresentatela graficamente.

12.7) i) Determinate i punti della curva $\mathcal{C}$ di equazione $4x^3 + x^2 - y^2 = 0$ in cui non è possibile applicare il teorema della funzione implicita rispetto ad alcuna delle due variabili.

ii) Determinate i punti della curva $\mathcal{C}$ di equazione $4x^3 + x^2 - y^2 = 0$ nei quali la retta tangente alla curva è orizzontale.

iii) Rappresentate graficamente $\mathcal{C}$ nel piano xy.

12.8) Determinate l'equazione del piano tangente alla superficie Σ definita dall'equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ nel punto $(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

12.9) Sia $g(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - 2xy$.

i) Rappresentate graficamente nel piano xy la curva $\mathcal{C}$ data da $g(x,y) = 0$ (usate le coordinate polari).

ii) Controllate se $(0,0)$ è un punto singolare per g.

iii) Verificate che $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ appartiene a $\mathcal{C}$, e provate che in un intorno di $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ la curva $\mathcal{C}$ è una curva cartesiana, più precisamente, la curva $\mathcal{C}$ è grafico di una funzione $y = \varphi(x)$. Determinate la retta tangente a $\mathcal{C}$ in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

12.10) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ e sia $g(x,y) = x^3 + \log y - xy$ definita su A.

i) Verificate che $(1,1)$ appartiene alla curva $\mathcal{C}$ di equazione $g(x,y) = 0$.

ii) Provate che esiste un intorno di U di $y_0 = 1$ ed una funzione $\psi : U \to \mathbf{R}$ tale che $g(\psi(y), y) = 0$ per ogni $y \in U$.

iii) Verificate che ψ ha in y_0 un punto critico e determinate la sua natura.

12.11) Dopo aver verificato che l'equazione

$$xy^2 + y + \sin xy + a(e^x - 1) = 0$$

definisce implicitamente per ogni $a \in \mathbf{R}$ una funzione $y = \varphi(x)$ di classe C^∞ in un intorno di $x_0 = 0$ tale che $\varphi(0) = 0$, calcolate

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) + ax}{x^2}.$$

12.12) Sia $g(x,y) = x^3 - y^3 + 2xy$ e sia $\mathcal{C}$ la curva di livello 0 della funzione g.

i) Scrivete l'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $(1,-1)$.
ii) Individuate i punti di $\mathcal{C}$ per i quali non è possibile applicare il teorema della funzione implicita (rispetto ad alcuna delle due variabili).

iii) Dopo aver verificato che in un intorno del punto $(1,-1)$ la curva $\mathcal{C}$ è grafico di $y = \varphi(x)$ per un'opportuna funzione $\varphi(x)$, calcolate il

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log|\varphi(x)|}{x-1}.$$

12.13) Determinate i punti di massimo e minimo locali delle funzioni $x \mapsto \varphi(x)$ definite implicitamente dall'equazione

$$x^3 - x^2y + y^3 - 8 = 0.$$