Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
CdL in Matematica e CdL in Fisica – a.a. 2021–2022

Esercizi paradigma 12 : "...stiamo per convergere... integrali generalizzati e la funzione integrale ..."
(29 novembre - 3 dicembre 2021)

12.1) a) Determinate i seguenti integrali di funzioni razionali:

$$\int \frac{1}{2x-4x^2}dx\,; \quad \int \frac{x+3}{x^2+2}dx\,; \quad \int \frac{x+1}{x(x-2)}dx\,; \quad \int \frac{3x^3+x^2}{x+1}dx\,; \quad \int \frac{1}{x^2+x+2}dx\,.$$

b) Determinate i seguenti integrali definiti:

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx\,; \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-2\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+1}dx\,; \qquad \int_1^2 \frac{8x+1}{x^2-x-6}dx\,;$

ii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4+2x^3+x^2+x+1}{x^2+2x+1}dx\,; \qquad \int_{-1}^0 \frac{-2x^3+x^2+2x+2}{x^2+3}dx\,; \qquad \int_0^3 \frac{2x}{x^2+2x+5}dx\,.$

12.2) Usando la definizione, calcolate i seguenti integrali impropri

i) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+4)^4}}\,dx\,; \qquad$ ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx\,; \qquad$ iii) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\,dx\,.$

12.3) Usando la definizione, calcolate i seguenti integrali impropri

i) $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(x-1)\log^2(x-1)}\,dx\,; \qquad$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+2)}\,dx.$

12.4) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\tan x}\,dx\,; \qquad$ ii) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-2\sqrt{3x+1}}}\,dx\,.$

12.5) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale generalizzato

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{[x(x+1)]^\alpha}\,dx\,; \qquad$ ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+\arctan\sqrt{x}}{|x+1|^\alpha x^{2\alpha}}\,dx\,;$

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\arctan\sqrt{|x|}}{|x-1|^{3\alpha}|x|^{\alpha+1}}\,dx\,; \qquad$ iv) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(x-x^2)^\alpha}}\,dx\,.$

12.6) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che risulti convergente l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x-1-\alpha\sin x}{x^2}\,dx\,.$$

12.7) Discutete la convergenza dei seguenti integrali generalizzati. Calcolate poi, usando la definizione, i loro valori.

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx\,; \qquad$ ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{3}{x^2+2x+3}\,dx\,.$

12.8) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri:

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt[3]{x}}\,dx\,; \qquad$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}\,\arctan\sqrt[4]{x}}dx\,.$

12.9) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, per i quali i seguenti integrali impropri convergono:

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\,dx\,; \qquad$ ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+1-\cos x)^{3\alpha}\arctan(x^{-3})}{(x^2+x)^{\frac{\alpha}{3}}\arctan x^2}dx\,.$

12.10) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, tali che risultino convergenti i seguenti integrali impropri:

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{1-x}}{(\tan\sqrt{1-x})(1-\cos x^{2\alpha})}\,dx\,; \qquad$ ii) $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{\sqrt[3]{3-x}}-1}{\sqrt{(x-1)^{4\alpha}(3-x)^{2\alpha}}}dx\,.$

12.11) i) Discutete la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x + 1}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$.

ii) Stabilite per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+2x^{3\alpha}) \arctan x^{\alpha}} dx$ risulta convergente.

iii) Stabilite per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sin x^{2\alpha} \tan(1-x^2)} dx$ risulta convergente.

12.12) Sia $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ una funzione Riemann integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere (motivando la risposta)?

i) La funzione $F(x) : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_2^x f(t)dt$ è una primitiva di f.

ii) $F(0)$ dà il valore dell'area del sottografico di f relativo all'intervallo $[0, 2]$.

iii) $F(1) \leq 0$.

iv) Se f è continua su $[-1, 4]$, allora $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-1, 4]$.

v) Se $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, allora esiste finito $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

vi) Se $f(x) = 2^x$, allora $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\frac{4}{\log 2}$.

12.13) Sia $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando la risposta)?

i) Se $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ è convergente, allora necessariamente $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

ii) Se f è anche una funzione infinitesima per $x \to +\infty$, allora necessariamente f è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty[$.

iii) Se f è una funzione decrescente e $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$, allora necessariamente f è una funzione infinitesima per $x \to +\infty$.

iv) Se $x^2 f(x)$ è infinitesima per $x \to +\infty$, allora la funzione f è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty[$.

12.14) Sia $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = \displaystyle\int_x^{x+\sin x} \frac{1}{\log(1+t)} dt$.

i) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x)$.

ii) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h'(x)$.

iii) Verificate che la funzione derivata $h'(x)$ è limitata su $]0, +\infty[$.