Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica

CdL in Matematica - a.a. 2021-2022

Esercizi Paradigma 13 - MOD2 : "Teorema del Dini (generale) e non solo"

(23 - 27 maggio 2022)

13.1) i) Determinate l'equazione della tangente alla curva di livello di

$$f(x,y) = 5\arctan\tfrac{y}{x} - 2\sqrt{x^2+y^2}$$

passante per il punto $(-3,4)$.

ii) Determinate l'equazione del piano tangente alla superficie di livello di

$$f(x,y,z) = xy^3 - 2x^2z - 3xyz^2$$

passante per il punto $(1,-1,2)$.

13.2) i) Provate che esiste una soluzione $y = \varphi(x)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in un intorno di $x_0 = 0$ dell'equazione $\varphi^3(x) + (x^2+1)\varphi(x) - x^2 = 0$.

ii) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 2 di φ centrato in x_0.

13.3) Sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(x,y,z) = xyz + 3y - \dfrac{z^2}{2} + 3 - x^2$.

i) Provate che l'equazione $g(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0,-1,0)$ una funzione $y = y(x,z)$ di classe C^∞.

ii) Provate che $(0,0)$ è un punto critico per la funzione $y(x,z)$ e determinate la sua natura. Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione $y(x,z)$ centrato in $(0,0)$.

iii) Scrivete l'equazione del piano tangente alla superficie di livello Σ data da $g(x,y,z) = 0$ nel punto $(0,-1,0)$.

13.4) Sia $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(x,y,z) = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 - 1$.

i) Provate che l'equazione $g(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(1,1,0)$ una funzione $x = x(y,z)$ di classe C^∞.

ii) Determinate l'equazione della retta normale al piano tangente al grafico di $x(y,z)$ nel punto $(1,1,0)$.

13.5) Sia $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(x,y,u,z) = x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2e^z$. Verificate che l'equazione $g(x,y,u,z) = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0,0,0,1)$ un'unica funzione $z = z(x,y,u)$ di classe C^∞. Provate che per tale funzione $(0,0,0)$ è punto critico. Determinate la natura di tale punto critico.

13.6) Sia dato il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x^2 + z^2 - y = 0\,, \end{cases}$

del quale $\mathbf{x_0} = (0,1,1)$ è soluzione.

i) Verificate che il sistema definisce implicitamente in un intorno del punto $\mathbf{x_0}$ due funzioni $y = y(x)$, $z = z(x)$ di classe C^∞. Determinate $y'(0)$ e $z'(0)$.

ii) Verificate che in questo caso si ha esplicitamente $y(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4x^2})$ e $z(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4x^2})$ per $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

13.7) Sia dato il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 - z = 0 \\ z - y + \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$

i) Verificate che il sistema definisce implicitamente in un intorno di $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ una curva in $\mathbf{R}^3$.

ii) Scrivete l'equazione parametrica della retta tangente a tale curva nel punto $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

iii) Individuate una rappresentazione parametrica del sostegno della curva individuata dal sistema.

13.8) Sia $\mathbf{g} : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ la funzione vettoriale definita da $\mathbf{g}(x,y,z,w) = (y^2 + w^2 - 2xz, y^3 + w^3 + x^3 - z^3)$.

i) Verificate che l'equazione $\mathbf{g}(x,y,z,w)=\mathbf{0}$ definisce implicitamente in un intorno di $(1,-1,1,1)$ una funzione $(y,w)\mapsto(\varphi(y,w),(\psi(y,w))$ con $(\varphi(-1,1),\psi(-1,1))=(1,1)$.
ii) Calcolate $\nabla\varphi(-1,1)$ e $\nabla\psi(-1,1)$.

13.9) i) Verificate che il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+zve^x-2=0 \\ xe^z+ye^v-z+v=0 \end{cases}$$

definisce implicitamente in un intorno del punto $(0,0,1,1)$ un'unica funzione $(x,y)\mapsto(v(x,y),(z(x,y))$.
ii) Calcolate la matrice jacobiana di tale funzione nel punto $(0,0)$.

13.10) i) Sia $\mathbf{r}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ la curva definita da $\mathbf{r}(t)=(t|t|,t^2)$. Rappresentate il sostegno di $\mathbf{r}(t)$. Osservate che $\mathbf{r}\in\mathcal{C}^1$, ma che in $t=0$ non esiste la retta tangente al sostegno della curva in $(0,0)$. Osservate che $\mathbf{r}'(0)=\mathbf{0}$!
ii) Sia $\mathbf{r}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ la curva definita da $\mathbf{r}(t)=(t^2,t^3)$. Rappresentate il sostegno di $\mathbf{r}(t)$. Osservate che $\mathbf{r}\in\mathcal{C}^1$, ma che in $t=0$ non esiste la retta tangente al sostegno della curva in $(0,0)$. Osservate che $\mathbf{r}'(0)=\mathbf{0}$!

13.11) **Esercizio riepilogo ('linee regolari' in $\mathbf{R}^2$**: grafici, curve di livello, sostegno di curve)
i) Sia $I\subseteq\mathbf{R}$ un intervallo e $f:I\to\mathbf{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1(I)$. Sia $x_0\in I$. Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0,f(x_0))$.

ii) Sia $A\subseteq\mathbf{R}^2$ aperto e sia $g\in\mathcal{C}^1(A)$. Sia $(x_0,y_0)\in A$ un punto regolare di g, cioè $\nabla g(x_0,y_0)\neq\mathbf{0}$. Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazione $g(x,y)=0$. Scrivete l'equazione della retta tangente alla curva nel punto (x_0,y_0).

iii) Sia $\mathbf{r}:I\to\mathbf{R}^2$ una curva di classe $\mathcal{C}^1$ regolare in $t_0\in I$, cioè $\mathbf{r}'(t_0)\neq\mathbf{0}$. Scrivete le equazioni parametriche della retta tangente al sostegno della curva in $\mathbf{r}(t_0)$.

13.12) **Esercizio riepilogo ('superfici regolari' in $\mathbf{R}^3$**: grafici di funzioni, superfici di livello, sostegno di superfici parametriche)
i) Sia $A\subseteq\mathbf{R}^2$ aperto e $f:A\to\mathbf{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1(A)$. Sia $\mathbf{x_0}\in A$. Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(\mathbf{x_0},f(\mathbf{x_0}))$.

ii) Sia $A\subseteq\mathbf{R}^3$ aperto e sia $g\in\mathcal{C}^1(A)$. Sia $(x_0,y_0,z_0)\in A$ un punto regolare di g, cioè $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq\mathbf{0}$. Sia Σ la superficie di livello $g(x,y,z)=0$. Scrivete l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto (x_0,y_0,z_0).

iii) Sia $A\subseteq\mathbf{R}^2$ aperto e sia $\mathbf{\Phi}:A\to\mathbf{R}^3$ una funzione vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$. Sia $\mathbf{u_0}=(u_0,v_0)\in A$ un punto regolare di $\mathbf{\Phi}$, cioè il rango di $J_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{u_0})=2$. Si dimostra (non lo dovete fare!) che le equazioni parametriche del piano tangente al sostegno di $\mathbf{\Phi}$, cioè a $\Sigma=\mathbf{\Phi}(A)$, nel punto $\mathbf{\Phi}(\mathbf{u_0})$ sono date da

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(\mathbf{u_0})+t\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial u}(\mathbf{u_0})+s\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial v}(\mathbf{u_0}),$$

ossia

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(\mathbf{u_0})+J_{\mathbf{\Phi}}(\mathbf{u_0})\binom{t}{s}\qquad t,s\in\mathbf{R}\ .$$